



TITLE:

真空管増幅器の過渡現象と周波増  
幅特性に関する基礎的研究(  
Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

近藤, 文治

---

CITATION:

近藤, 文治. 真空管増幅器の過渡現象と周波増幅特性に関する基礎的研究. 京都大学, 1951, 工学博士

ISSUE DATE:

1951-04-18

URL:

<https://doi.org/10.14989/161911>

RIGHT:

真空管増幅器の過渡現象と  
周期波増幅特性に関する基礎的研究

京都大學助教授

近藤 文治

(電氣工學教室)

昭和二十四年五月

DOC

1950

5

電氣系

# 真空管増幅器の過渡現象と周期波増幅特性 に関する基礎的研究

DOC

1950

5

電気系

目

次

頁

## 緒 論

1. 波形伝送回路としての真空管増幅器の過渡現象と周波数特性 1
2. 周期的入力に対する出力波解析の必要性 3
3. 従来の研究の概要 4
4. 本研究の内容梗概 4
5. 謝辞 6

## 第I編 断続回路解析法に依る研究

### 第1章 Sylvesterの定理の拡張形式

- 1.1 Sylvesterの定理 7
- 1.2 Sylvesterの定理の拡張 8
- 1.3 Sylvesterの定理の周波積分表示 10
- 1.4 行列[A]の最小整式が $\Omega(\lambda)$ なる場合に対するSylvesterの定理の諸形式 15

### 第2章 周期的印加起電力並に強制電流に依って誘起される電位並に電流の新解析法

- 2.1 過渡電位及び電流の一般算定公式 18
- 2.2 安定性問題 20
- 2.3 定常電位及び電流の一般算定公式 26
- 2.4 新解析法の特徴と之に使用す可き種々なる衝撃駆動力の演算子形 28

### 第3章 周期的衝撃波に対する各種低周波増幅器の増幅特性

- 3.1 抵抗結合増幅器 30
- 3.2 4ヨーク結合増幅器 41
- 3.3 第3章の總括 46

第4章 周期的衝撃波に対する単一同調回路単段増幅器の増幅特性

4.1	一次側に同調回路を有する単一同路増幅器	47
4.2	入力波の数値計算例及び物理的意味の考察	57
4.3	二次側に同調回路を有する単一同路増幅器	60
4.4	第4章の総括	

第5章 多段増幅器並びに饋還増幅器の解析法

5.1	多段増幅器の基礎微分方程式	64
5.2	多段増幅器の解析に際し出現する諸行列の具体的計算法	66
5.3	抵抗結合二段及び三段増幅器の周期的信号波増幅特性	70
5.4	饋還増幅器の基礎微分方程式	73

第6章 実験的考察

6.1	抵抗結合増幅器に関する検討	75
6.2	単一同調回路増幅器の周期的矩形波調波入力に対する出力波形の検討	76
	〔参考文献〕	

第II編 周期力に対する新相束定理に依る研究

第1章 任意の周期力に依って低周波回路に誘起せられる過渡並びに定常現象の一般的解析法

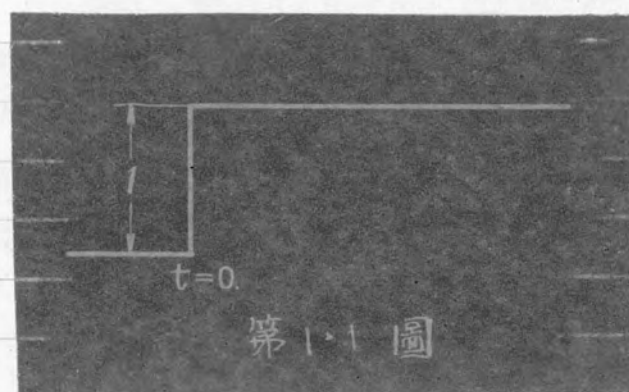
1.1	任意の周期的衝撃波に依って誘起せられる過渡並びに定常現象の一般的解析法	79
1.2	種々なる一般的周期力に依って誘起せられる過渡並びに定常現象の解析法	82
1.3	新解析法の適用に際し注意すべき事項	85

第2章 非周期的或は周期的被変調波入力に依って高周波回路に誘起せられる過渡並びに定常現象の包絡波形の一般的解析法(包絡演算子法と新解析法の適用)

2.1	概説	88
2.2	包絡演算子法 — 其の一 (包絡インデシャル量)	89
2.3	包絡演算子法 — 其の二 (包絡相乗定理)	92
2.4	包絡演算子法 — 其の三 (補遺)	93
2.5	任意の周期的被変調波入力に依って誘起する現象の包絡線の一般的解析法	97



	頁
第3章 單段增幅器の過渡現象と周期波増幅特性	
3.1 序説	100
3.2 低周波增幅器	100
3.3 高周波增幅器	102
3.4 饋還增幅器	103
3.5 種々なる周期的衝撃波に対する基本入力波	107
3.6 代表的增幅器の $G_i$ 及び $A_i$ の値及び回路位數の定義	109
第4章 低周波多段增幅器の過渡現象と周期的 信号波増幅特性	
4.1 序説	111
4.2 1回路增幅器の解析	112
4.3 1回路增幅器の周期的インデシャル増幅率	113
4.4 2回路增幅器の解析	117
4.5 3回路增幅器の解析	124
4.6 広帯域抵抗結合增幅器の解析	130
第5章 高周波多段增幅器の過渡現象と周期的 信号波増幅特性	
5.1 序説	140
5.2 種々の高周波增幅器の包絡インデシャル増幅率の $\rho$ 函数	140
5.3 1回路增幅器の解析	149
5.4 2回路增幅器の解析	153
5.5 3回路增幅器の解析	158
[参考文献]	
附 録	
附録 1. 従来の解析手段とその得失	161
附録 2. 真空管增幅器回路の過渡現象並びに周期波増幅 特性に関する従来の研究の概要	169
附録 3. $B_2(A_{t0})$ の値に就いて	172
[参考文献]	



第 1.1 圖

## 緒 論

### (1) 波形伝送回路としての真空管増幅器の過渡現象と周波数特性

我々の耳は、その生理的な構造の上から、種々の音と、調子、強さ及び音色の三要素に依つて区別する。然して調子は周波数に依つて、強さは振幅に依つて、又音色は音を構成する各調波の種類とその割合のみによつて決定され、各調波の位相差は聴覚に影響を與へないとされてゐる。従つて音響の付送を目的とする回路に在つては振幅の周波数特性が問題で、之に依つて伝送回路の良否を凡そ決定する事が出来る。

一方波形の伝送を目的とする伝送系としては、古くより電信があつたが、電信の場合は伝送すべき波形が極めて簡単であり、その否の許容限度は大で、伝送回路網に要求せられる條件は比較的狭で、通常容易に満足せしめることが出来た。然るに落真電送に在つては、電信に於けるよりは更に忠実な波形の伝送が要求せられるが、尚その許容限度は比較的大であつた。然しテレビジョンの出現に依り極めて忠実な波形の伝送が要求せられ、伝送回路の條件は極めて嚴格となるに至つた。然して之等通信回路としての波形伝送回路には、何等かの形で真空管増幅器が用ゐれる事が多く、之が増幅特性は該回路の波形伝送能力を左右する一つの大きな要素である。

又單に上述せるが如き通信関係の波形伝送に限らず、其の他の電気工学の諸分野或は機械建築土木等凡ゆる分野に於ける過渡現象の研究と相俟つて、波形を直線的に増幅するとの必要性は益々増大しつつある。

然らば單に真空管増幅器回路に限らず一般の波形伝送回路に在つて、波形伝送能力は何に依つて表現せられるか、又之れと該回路の周波数特性との関係はどうかと云ふ問題を簡単に考へよう。

演算子法に於ける相乗定理に依れば、第1.1回に示すが如き、單位跳躍入力  $H(t)$  に対する出力を  $A(t)$  とせば、任意の波形を有する入力  $e(t)$  に対応する出力  $f(t)$  は

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

にて計算せられる。然して  $A(t)$  は該伝送回路に固有の値で、インデシャル量と呼ばれられるものである。之れが既知ならば、 $f(t)$  は計算或は図式的に求める事が出来る。従つて  $A(t)$  を以て該回路の波形伝送能力の一つの尺度となす事が出来る筈である。上式は更に

$$f(t) = e(t) A(0) + \int_0^t e(t-\tau) \dot{A}(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

$$\dot{A}(t) = \frac{d}{dt} A(t) \quad (1.3)$$

と表はすことも出来る。(1.2)式右辺の第1項は無寄出力で、第2項即ち

$$f_1(t) = \int_0^t e(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

に依つて出力波形の形が決定される。従つて  $A(t)$  の代りに  $h(t)$  を以て、該伝送系の波形伝送能力の尺度となつても差支へない。次ぎに  $h(t)$  の物理的意義を考へるに、入力として

$$\left. \begin{aligned} I(t) &= 0 & t < 0, \quad t > \varepsilon \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} I(t) dt &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

なる単位衝撃波を考へる。之を(1.4)式に代入すれば

$$f_1(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^t I(t-\tau) h(\tau) d\tau = h(t) \quad (1.6)$$

従つて  $t > \varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) に対する該回路の出力は(1.5)式に依り  $I(t) = 0$  なるを以て

$$f(t) = h(t)$$

となる。即ち伝送回路に(1.5)式の如き単位衝撃波を加へた場合の出力が  $h(t)$  に外ならない。

一方上の問題を Fourier 積分法を利用し、周波数スペクトラムの概念より此の問題を考察する、入力  $e(t)$  の周波数スペクトラムを  $E(f)$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(f) e^{j2\pi ft} df \\ E(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

なる関係がある。斯様な入力か周波数特性  $\Phi(f)$  なる伝送回路を通過せる後の出力波形は

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) \Phi(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.8)$$

にて表へられる。然るに入力か(1.6)式の単位衝撃波の場合には

$$E(f) = 1$$

なるを以て、今の場合の出力  $h(t)$  は(1.8)式より次の関係を満足することを知る。

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi ft} df \\ \text{或は逆に} \quad \Phi(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

上式が周波数特性  $\Phi(f)$  と  $h(t)$  との関係式に外ならない。

然るに  $\Phi(f)$  は一般に



$$\left. \begin{aligned} \Phi(f) &= e^{-\varphi(f)} \\ \varphi(f) &= a(f) + j b(f) \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

と表はせる可きもので

$$G(f) = e^{-a(f)} \quad \text{及び} \quad \theta(f) = e^{-j b(f)} \quad (1.11)$$

は夫々振幅並びに位相特性を表へる。従つて回路の周波数特性が轉へられれば一義的に  $\theta(f)$  従つて  $A(f)$  が定まるのであるが、音響伝送回路の場合とは異り、振幅並びに位相の周波数特性を併せ考へなければならぬ。

然し波形の伝送と云ふ處から云へば、その回路の特性を表はすのに、上述の如きより明かなしくは、周波数特性を以てするのは直接的で不便であり、 $A(f)$  或は  $\theta(f)$  を用いた方が、直接的で利用価値も大である。此れ、真空管増幅器回路が、従来正弦波源の見地から、専ら振幅並びに位相の周波数特性を以て論ぜられて来たのが、近頃波形の忠実な伝送と云ふ見地から、寧ろ過渡現象  $A(t)$  或は  $\theta(t)$  を問題とする様になつた所以で、本研究の趣旨も茲に存するのである。

## 2. 周期的入力に対する出力波解析の必要性。

入力が周期的な場合の出力は、過渡現象の連続と見做すことが出来る。即ち単一孤立波入力に依つて誘起せられる過渡現象が一周期毎に重畳せるものと解される。従つて入力の周期が比較的短かく、或る周期に於ては入力に依つて誘起せる現象が、未だ定常状態に到達しない内に、次の入力がかかる場合には、入力が周期的なるか或は非周期的な単一孤立波なるかに依りて、夫々の出力の間に差違を生ずる事は明かで、單に單一孤立入力に対する出力より、入力が周期的な場合の出力を推測する事は、附として大なる誤りを招く懼がある。

又波形状伝送回路が實際に使用される状態では入力は何等かの意味で連続的なもので、ある一定の入力が周期的に繰返される場合は極めて多く、然もその繰返しの周期が問題となる現象は波形状伝送回路には山積してゐる。例へば電信は dot 及び dash の繰返してあり、その繰返しの周期は通信速度を左右する。又寫真電送及びテレビジョンに於ては、原画が縦横を有する場合の信号は周期的なもので、その周期性（線の細さと掃引速度に依つて決る）は受像画の鮮明度に關係がある。一方時分割多重通信に於ては、信号は周期的な信号波に依つて伝送され、一通路路を構成する衝撃波に依つて誘起せられた現象が、他の通路路を構成する衝撃波に依つて誘起せられた現象に重畳する場合には両通路路間に漏話を生ずる。

其の他波形伝送回路に密接な関係を有するブランク管回路の時間軸には周期的な歯状波を必要とし、之に伴って周期的な歯状波、矩形波等の周期的特殊波形波の解析は、精密な波形の測定から云つては乏しくべからざるものである。尚多少分野を異にするかも知れないが、同じく波形の測定を目的とする過渡現象直視装置の如きも周期的な駆動力（主として矩形波或は衝撃波）に依つて誘起せられた現象を利用するもので、駆動力の周期性は所謂繰返し誤差を誘起する恐れがある。

以上は主として波形伝送回路に於ける周期的駆動力の解析を必要とする代表的な例に過ぎないのであるが、更に波形伝送回路に留らず広く電気工学に於ける周期力の解析の必要性は贅言を要しない。

本研究に於て特に真空管増幅器にて周期波を増幅せる場合の出力波形の研究を上げると共に周期的現象の解析法そのもの、研究も一つの大きな主題として選んだ理由も茲に存する次第である。

### 3 従来の研究の概要（附録Ⅰ及びⅡに譲る。）

### 4 本研究の内容梗概

今日我々が波形伝送回路としての真空管増幅回路の過渡現象或は周期波増幅特性として究明すべき諸現象は、具体的な回路の周波数特性を多少少かれ理想化した非実在的な所謂理想的周波数特性を仮定して、（それが実在の回路の周波数特性に良く似てゐるにても）Fourier積分法その他の方法に依つて得られた角解析結果を以てしては、その精度に於て不十分であり、今や具体的な個々の回路に就いて、厳密な解析を行ふ必要あることは既述の如くである。従つて解析法そのものにも充分の検討を要することは言を俟たない。

又過渡現象の解析法としては、具体的な回路の與へられる今の場合、演算子法を採用するのが色々の確見から云つて妥当であることは説明を要しないであらう。然るに周期波増幅特性、即ち周期的入力に対する出力波形の解析法に在つては従来の方法は前節に説明せる如く、夫々種々の欠点を有してゐるのに鑑み、筆者は茲に新たに2つの解析法を提案せんとするもので、本論文もその解析法に従つて2編に分った次第である。

#### [A] Ⅰ編の内容梗概



最後に林教授は断続回路の一般的解析手段を創案せられたが、筆者の解析の対称である入力のみが周期的に変化し、回路の構成要素は、現象の全期間を通じて何等変化を受けず回路は、一般断続回路の一特異形式と見做し得るのであつて、上述の林教授の断続回路の一般的解析手段を拡張適用する時は、従来主として採用されて来た Fourier 級数法の諸欠点を一掃し、Fourier 級数法とは異り、定常状態のみならず過渡状態をも併せ解析し得るのである。即ち本解析法に依つて得られる解は定常状態と過渡状態の何れを問はず“無限級数とはならず”有限値の初等函数の集合を以て表示せられ、数値計算に依る波形の描出は極めて正確且つ容易であり、然も解が不連続点を包含する場合に於ても、Fourier 級数に於ける Gibbs の現象の如き不都合は全然ない。

然して第 3 章以下に於ては、上述の新解析法を適用して各種の代表的真空管増幅器回路の周期波増幅特性を解明した。即ち低周波増幅器回路に属するものの中、抵抗結合、4 コーク結合及び補償抵抗結合増幅器を、又高周波増幅器としては、単一同調回路増幅器を取上げ、前者に対しては周期的矩形波及び三角波の増幅特性と、又後者に対しては周期的矩形波変調波の増幅特性と回路定数との関係を論じ、単一孤立波入力との相違点を詳細に究明すると共に増幅増幅の条件を極めて設計の便を図つた。又本解析法を多段増幅器及び饋還増幅器の解析に適用し、その一例として周期的矩形波及び三角波を抵抗結合増幅器にて増幅せる場合の出力波形を解析し、単段増幅器の出力との相違点を指摘した。最後に抵抗結合及び単一同調回路増幅器にて夫々周期的矩形波及び周期的矩形波変調波入力を増幅せる場合に就いて行つた実験結果と周期的信号波増幅特性の解析結果を比較し、両者が極めて良く一致することを示した。

### 【3】第 2 編の内容梗概

波形伝送理論に於ける相乗定理の重要性は今更贅言を要しない處で、特に入力或はインディシャル量が図式的に與へられた場合にも図式解法が極めて簡便に行ひ得る利点がある。然るに之を周期的入力の解析に適用する時は可なり問題がある。即ち入力の周期に比してインディシャル量の減衰の時間定数が大なる場合、相当時間の経過せる後の過渡状態或は定常状態を図式的に解析するには極めて大なる労力を要する。

一方又被変調波入力がかへられた時の解析は入力が周期的なる時は勿論の事

然らざる場合に在つても相当煩雜で、特に四式解は不可能に近い。以上の事實に鑑み筆者は従来の相乗定理に於けるインデシヤル量に対応して、新たに周期的インデシヤ量なるものを導入し、従来の相乗定理を变形して周期現象の解析に適した新しい形の相乗定理を提案した。之に依れば、先に提案せる解析法とは異り、回路中に如何に多くのリアクタンス素子が含まれておようと極めて簡単に過渡並びに定常現象を解析し得るのであつて、然も解は有限箇の初等函数の集合を以て表現し得る。又一方四式解法も單に一周期間の相乗計算を行ふ事に依つて直ちに所要の任意の周期に於ける過渡状態並びに定常状態を知る事が出来る。

然して筆者の提案せる周期的インデシヤル量を周期波伝送能力の一つの基準と爲し得る事は、丁度非周期波の夫がインデシヤル量に依つて表はされるのと同様なる事に注目して、各種の低周波増幅器並びに多段増幅器に就て上述の周期的インデシヤル量を求め、オ工編に得られた諸結果を更に一般的周期波入力に就いて、且つより一般的増幅器回路へ拡張した。

一方又高周波回路に被変調波入力がかへられた時の包絡出力の解析法として包絡演算子法なるものを提案し、~~従来~~包絡線解析法に明確な數學的根據を附與すると共に、従来の近似解法の近似度を明かにし、之が適用の限界を規定した。然して周期的インデシヤル量の代りに周期的包絡インデシヤル量を導入する時は上述の新相乗定理に依り周期的被変調波入力に対する包絡出力は過渡状態たと定常状態たとを向はず極めて簡単に解析し得るのである。

筆者は本解析法を單段並びに多段高周波増幅器回路の所謂過渡現象並びに一般周期的被変調波入力に対する包絡出力の解析に適用し、低周波増幅器回路に於けると同様、オ工編の諸結果を一般的回路に拡張した。

又入力の性質の如何に拘らず、任意の低周波増幅器の出力は抵抗結合増幅器の出力の適當な組合せに依つて表現せられ、一方任意の高周波増幅器の包絡出力は單一同調回路増幅器の夫の適當な組合せに依つて表現せられることを明かにすると共に、或る低周波増幅器にかへられた任意の入力に対する出力は、高周波増幅器に、低周波増幅器にかへられた入力を包絡線とする被変調波入力がかへられた時の包絡出力と極めて簡単な關係式にて結び付けられてゐることも見出し、低周波並びに高周波の何れか一方増幅器に対して得られた出力波形の算定公式を直ちに他の増幅器に適用することを可能ならしめ、従来必要に応じて個々の回路に対して難然と得られ來つた諸研究結果を体系的に綜括する基礎を築いた。

## 5. 謝辞

本研究は筆者が京都大学電気工学科卒業以来、母校電気工学教室において、恩師 林 重憲教授の御指導を受けて行はれたもので、本論文を草するに当り、平素の懇切なる御教示、御鞭撻並びに興へられた御便宜に対し深甚な感謝を捧げ、以て報恩の万分の一とも致し度い。又現京都大学総長鳥養先生を始め電気工学教室の諸先生の御激励に対し、此の機会に厚く御禮申上げると共に、種々有益な御助言御討議を賜はった教室の諸兄並びに本論文作製に御協下された講座の各位に満腔の感謝を捧げる次第である。

# 第1編 断続回路解析法に依る研究

## 第1章 Sylvesterの定理の拡張形式<sup>(1)</sup>

### 1.1 Sylvesterの定理

行列[A]の特有整式を $\varphi(\alpha)$ とし、特有根を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  (但し $m$ は行列[A]の次数)とせば、

$$\varphi(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \dots (\alpha - \alpha_m) \quad (1.1.1)$$

なる関係がある。上式の $\alpha$ の代りに行列[A]を、 $\alpha_i$ の代りに $\alpha_i[I]$  (但し[I]は単位行列を意味する)と置けば次の恒等式が得られる。

$$\varphi([A]) = ([A] - \alpha_1[I])([A] - \alpha_2[I]) \dots ([A] - \alpha_m[I]) \quad (1.1.2)$$

然るに Cayley-Hamiltonの定理<sup>(2)</sup>に依れば、

$$\varphi([A]) = [0] \quad (1.1.3)$$

である。茲に[0]なる記号は零要素とする行列を意味する。然るに(1.1.2)式より明かな如く $\varphi([A])$ は[A]についての $m$ 次式である。従つて(1.1.3)式は[A],  $[A]^2, \dots, [A]^m$ が一次的に關聯してゐる事を示し、 $[A]^m$ は[A],  $[A]^2, \dots, [A]^{m-1}$ の一次結合として表される。又 $[A]^{m+1}$ は

$$[A]^{m+1} = [A]^m [A] \quad (1.1.4)$$

と考へ、上式の右辺の $[A]^m$ を[A],  $[A]^2, \dots, [A]^{m-1}$ の一次結合として表す時は右辺の最高冪の項は $[A]^m$ となる。更に之を[A],  $[A]^2, \dots, [A]^{m-1}$ の一次結合として表せば、結局 $[A]^{m+1}$ も亦[A],  $[A]^2, \dots, [A]^{m-1}$ の一次結合として表現される。

斯る操作を繰返へず時は一般に $[A]^{m+k}$  ( $k \geq 0$ )なる行列を[A],  $[A]^2, \dots, [A]^{m-1}$ の一次結合として表すことが出来る。従つて[A]に關する任意の整式 $F([A])$ 次の形に置くことが出来る。

$$\begin{aligned} F([A]) &= e_1(\alpha_1[I] - [A])(\alpha_2[I] - [A]) \dots (\alpha_m[I] - [A]) \\ &+ e_2(\alpha_1[I] - [A])(\alpha_3[I] - [A]) \dots (\alpha_m[I] - [A]) \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ e_m(\alpha_1[I] - [A])(\alpha_2[I] - [A]) \dots (\alpha_{m-1}[I] - [A]) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

茲に $e_1, e_2, \dots, e_m$ は適当に選定せられた常数である。一方(1.1.2)の關係を利用すれば(1.1.5)式は更に次の様に書くことが出来る。<sup>\*</sup>

$$F([A]) = (-1)^m \{ e_1(\alpha_1[I] - [A])^{-1} + e_2(\alpha_2[I] - [A])^{-1} + \dots + e_m(\alpha_m[I] - [A])^{-1} \} \varphi([A]) \quad (1.1.6)$$

茲で一言注意すべき事がある。即ち $(\alpha_i[I] - [A])$ の余分行列 (Adjoint Matrix) を $[K(\alpha_i)]$ とせば、

$$(\alpha_i[I] - [A])^{-1} = \frac{[K(\alpha_i)]}{\varphi(\alpha_i)} \quad (1.1.7)$$

\*  $(\alpha_i[I] - [A])$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) なる行列同志の積に在つては交換則が成立する事に注意を要する。



然るに  $\alpha_i$  は行列  $[A]$  の特有根 即ち  $\varphi(\alpha_i) = 0$  なるを以て一般には

$$(\alpha_i [I] - [A])^{-1} = [\infty] \quad (1.1.8)$$

となる。但し  $[\infty]$  なる記号は  $\infty$  を要素とする行列を意味する。然るに (1.1.3) 式に依れば

$\varphi([A]) = [0]$  であり、(1.1.6) 式の  $(\alpha_i [I] - [A])^{-1} \varphi([A])$  の値は  $[\infty][0]$  なる不定形となるが、(1.1.2) 式より明かならう

$$\begin{aligned} (\alpha_i [I] - [A])^{-1} \varphi([A]) &= (-1)^m (\alpha_i [I] - [A]) (\alpha_2 [I] - [A]) \cdots (\alpha_{i-1} [I] - [A]) \\ &\quad \times (\alpha_{i+1} [I] - [A]) (\alpha_{i+2} [I] - [A]) \cdots (\alpha_m [I] - [A]) \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

は有限確定値を取る。

次に (1.1.6) 式の  $e_1, e_2, \dots, e_m$  を求めよう。(1.1.6) 式に於て  $[A]$  の代りに  $\alpha$  を、 $\alpha_i [I]$  の代りに  $\alpha_i$  と置けば次式を得る。

$$(-1)^m \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \left\{ \frac{e_1}{\alpha_1 - \alpha} + \frac{e_2}{\alpha_2 - \alpha} + \cdots + \frac{e_m}{\alpha_m - \alpha} \right\} \quad (1.1.10)$$

従つて  $e_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) は次式に依つて決定される。

$$e_i = (-1)^m \left\{ (\alpha - \alpha_i) \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} \right\}_{\alpha=\alpha_i} \quad (1.1.11)$$

上式を (1.1.6) 式に代入すれば

$$F([A]) = - \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha - \alpha_i) (\alpha_i [I] - [A])^{-1} \right]_{\alpha=\alpha_i} \right\} \varphi([A]) \quad (1.1.12)$$

或は (1.1.1) 及び (1.1.2) の關係を上式に代入する時は

$$F([A]) = \sum_{i=1}^m F(\alpha_i) \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^m (\alpha_j [I] - [A])}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (\alpha_j - \alpha_i)} \quad (1.1.13)$$

を得る。上式が通常 Sylvester の定理として知られてゐる式である。

## 1.2 Sylvester の定理の拡張

(1.1.12) 或は (1.1.13) 式に於ては行列  $[A]$  の特有根が互に單根なる事が必要で、重根を有する場合には不定形となり其儘では適用出来ない。斯る場合の公式は勿論 (1.1.12) 或は (1.1.13) 式の極限值として求め得るが、實際に斯る方法で求め得るのは高々二重根<sup>(\*)</sup>乃至は三重根が存在する場合に限られ、それ以上の場合は計算が加算度的に煩雜となり實際問題として不可能に近い。従つて重根の存在する場合の一般公式は別の方法にて誘導する必要がある。次に之を求めよう。

$[A]$  の特有根を  $\alpha_1$  ( $m_1$  重根),  $\alpha_2$  ( $m_2$  重根),  $\dots$ ,  $\alpha_s$  ( $m_s$  重根) (但し  $m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$ ) と仮定すれば

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= (\alpha - \alpha_1)^{m_1} (\alpha - \alpha_2)^{m_2} \cdots (\alpha - \alpha_s)^{m_s} \\ \varphi([A]) &= ([A] - \alpha_1[\Pi])^{m_1} ([A] - \alpha_2[\Pi])^{m_2} \cdots ([A] - \alpha_s[\Pi])^{m_s} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

又て  $\varphi([A]) = [0]$  なる事に依り前節に於けると同様の考察に依り

$$\begin{aligned} F([A]) &= \left\{ e_{1,m_1}[\Pi] + e_{1,m_1-1}(\alpha_1[\Pi] - [A]) + \cdots + e_{1,1}(\alpha_1[\Pi] - [A])^{m_1-1} \right\} \\ &\quad \times \left\{ (\alpha_2[\Pi] - [A])^{m_2} (\alpha_3[\Pi] - [A])^{m_3} \cdots (\alpha_s[\Pi] - [A])^{m_s} \right\} \\ &+ \cdots \\ &+ \left\{ e_{i,m_i}[\Pi] + e_{i,m_i-1}(\alpha_i[\Pi] - [A]) + \cdots + e_{i,1}(\alpha_i[\Pi] - [A])^{m_i-1} \right\} \\ &\quad \times \left\{ (\alpha_1[\Pi] - [A])^{m_1} \cdots (\alpha_{i-1}[\Pi] - [A])^{m_{i-1}} (\alpha_{i+1}[\Pi] - [A])^{m_{i+1}} \cdots (\alpha_s[\Pi] - [A])^{m_s} \right\} \\ &+ \cdots \\ &+ \left\{ e_{s,m_s}[\Pi] + e_{s,m_s-1}(\alpha_s[\Pi] - [A]) + \cdots + e_{s,1}(\alpha_s[\Pi] - [A])^{m_s-1} \right\} \\ &\quad \times \left\{ (\alpha_1[\Pi] - [A])^{m_1} (\alpha_2[\Pi] - [A])^{m_2} \cdots (\alpha_{s-1}[\Pi] - [A])^{m_{s-1}} \right\} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

となる。或は (1.2.1) の関係を利用すれば

$$\begin{aligned} F([A]) &= (-1)^{m-1} \left\{ e_{1,m_1}(\alpha_1[\Pi] - [A])^{-m_1} + e_{1,m_1-1}(\alpha_1[\Pi] - [A])^{-m_1+1} + \cdots + e_{1,1}(\alpha_1[\Pi] - [A])^{-1} \right\} \\ &+ \cdots \\ &+ \left\{ e_{i,m_i}(\alpha_i[\Pi] - [A])^{-m_i} + e_{i,m_i-1}(\alpha_i[\Pi] - [A])^{-m_i+1} + \cdots + e_{i,1}(\alpha_i[\Pi] - [A])^{-1} \right\} \\ &+ \cdots \\ &+ \left\{ e_{s,m_s}(\alpha_s[\Pi] - [A])^{-m_s} + e_{s,m_s-1}(\alpha_s[\Pi] - [A])^{-m_s+1} + \cdots + e_{s,1}(\alpha_s[\Pi] - [A])^{-1} \right\} \varphi([A]) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

上式に対するスカラー恒等式は

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1} \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} &= \frac{e_{1,m_1}}{(\alpha_1 - \alpha)^{m_1}} + \frac{e_{1,m_1-1}}{(\alpha_1 - \alpha)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{e_{1,1}}{(\alpha_1 - \alpha)} + \cdots \\ &+ \frac{e_{i,m_i}}{(\alpha_i - \alpha)^{m_i}} + \frac{e_{i,m_i-1}}{(\alpha_i - \alpha)^{m_i-1}} + \cdots + \frac{e_{i,1}}{(\alpha_i - \alpha)} + \cdots \\ &+ \frac{e_{s,m_s}}{(\alpha_s - \alpha)^{m_s}} + \frac{e_{s,m_s-1}}{(\alpha_s - \alpha)^{m_s-1}} + \cdots + \frac{e_{s,1}}{(\alpha_s - \alpha)} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

となる。従つて  $e_{i,m_i-j}$  なる係数は次の演算に依つて決定する事が出来る。即ち

$$e_{i,m_i-j} = \frac{(-1)^{m-1+j+m_i}}{j!} \left\{ \frac{d^j}{d\alpha^j} \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha - \alpha_i)^{m_i} \right\}_{\alpha=\alpha_i} \quad (1.2.5)$$

然るに

$$(\alpha_i[\Pi] - [A])^{-(m_i-j)} = \frac{(-1)^{m_i-j-1}}{(m_i-j-1)!} \left\{ \frac{d^{m_i-j-1}}{d\alpha^{m_i-j-1}} (\alpha[\Pi] - [A])^{-1} \right\}_{\alpha=\alpha_i} \quad (1.2.6)$$



ほるを以て

$$e_{i, m_i-j} (\alpha_i [A] - [A])^{-m_i-j} = (-1)^m \left\{ \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\alpha^j} \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha - \alpha_i)^{m_i} \right\} \\ \times \left\{ \frac{1}{(m_i-j-1)!} \frac{d^{m_i-j-1}}{d\alpha^{m_i-j-1}} (\alpha [A] - [A])^{-1} \right\} \Big|_{\alpha=\alpha_i} \quad (1.2.7)$$

従つて

$$\sum_{j=0}^{m_i-1} e_{i, m_i-j} (\alpha_i [A] - [A])^{-m_i-j} \\ = \frac{(-1)^m}{(m_i-1)!} \left[ \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} \left\{ \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha - \alpha_i)^{m_i} (\alpha [A] - [A])^{-1} \right\} \right] \Big|_{\alpha=\alpha_i} \quad (1.2.8)$$

となる。上式を (1.2.3) に代入すれば

$$F([A]) = - \sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} \left\{ \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha - \alpha_i)^{m_i} (\alpha [A] - [A])^{-1} \right\} \right] \Big|_{\alpha=\alpha_i} \varphi([A]) \quad (1.2.9)$$

を得る。或は簡単の爲に

$$\frac{\varphi(\alpha)}{(\alpha - \alpha_i)^{m_i}} = (\alpha - \alpha_1)^{m_1} (\alpha - \alpha_2)^{m_2} \cdots (\alpha - \alpha_{i-1})^{m_{i-1}} (\alpha - \alpha_{i+1})^{m_{i+1}} \cdots (\alpha - \alpha_s)^{m_s} \equiv \varphi_i(\alpha) \quad (1.2.10)$$

と置けば, (1.2.9) 式は更に次の如く書く事が出来る。

$$F([A]) = - \sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} \left\{ \frac{F(\alpha)}{\varphi_i(\alpha)} (\alpha [A] - [A])^{-1} \right\} \right] \Big|_{\alpha=\alpha_i} \varphi([A]) \quad (1.2.9)'$$

(1.2.9) 或は (1.2.9)' 式にその所要の等根の存在する場合に對して拡張せられた Sylvester の定理である。

### 1.3 Sylvester の定理の周回積分表示

以上論じ来た處の Sylvester の定理は、行列  $[A]$  の特有根中に重根が存在する否とに拘らず、同一形式の極めて簡単な周回積分で統一的に表現出来るのである。即ちそれには先づ次の如き周回積分  $[I]$  を考へる。

$$[I] = - \frac{\varphi([B])}{2\pi j} \oint_C \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha [A] - [B])^{-1} d\alpha \quad (1.3.1)$$

但し行列  $[B]$  は行列  $[A]$  と同次で、その特有根は  $\varphi(\alpha) = 0$  を満足せず、 $\varphi([B]) \neq 0$  なるゼロき行列であるとする。然して積分路  $C$  は  $\varphi(\alpha) = 0$  なる特異点(極)のみをその内部に包含する様適当に選定せられた任意の閉曲線にて、その上を正方向に一周して積分するものとす。然る時は (1.3.1) 式の被積分函数中の  $F(\alpha)(\alpha [A] - [B])^{-1}$  は  $C$  の上並ひにその内部に於て正則であり、特異点としては  $\varphi(\alpha) = 0$  の根  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) が極を與へる。従つて

之等の根が凡て単根ならば, 留数定理に依り

$$[I] = - \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha - \alpha_i) (\alpha [Q] - [B])^{-1} \right]_{\alpha=\alpha_i} \right\} \varphi([B]) \quad (1.3.2)$$

$$\text{但し } \varphi([B]) = (-1)^m (\alpha_1 [Q] - [B]) (\alpha_2 [Q] - [B]) \cdots (\alpha_m [Q] - [B]) \quad (1.3.3)$$

然るに (1.3.2) と (1.1.12) 式とを比較すれば

$$F([A]) = \lim_{[B] \rightarrow [A]} [I] \quad (1.3.4)$$

なる関係を得る。

一方  $\varphi(\alpha) = 0$  の根の中に重根が存在する場合には 1.2 に於けると同様  $\alpha_i$  を  $m_i$  重根 (但し  $i=1, 2, \dots, s$ ,  $m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$ ) と仮定すると,  $\alpha_i$  は  $m_i$  位の極となり, 留数定理に依り,

$$[I] = - \sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} \left\{ \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha - \alpha_i)^{m_i} (\alpha [Q] - [B])^{-1} \right\} \right]_{\alpha=\alpha_i} \varphi([B]) \quad (1.3.5)$$

$$\text{但し } \varphi([B]) = (-1)^m (\alpha_1 [Q] - [B])^{m_1} (\alpha_2 [Q] - [B])^{m_2} \cdots (\alpha_s [Q] - [B])^{m_s} \quad (1.3.6)$$

従って今の場合にも

$$F([A]) = \lim_{[B] \rightarrow [A]} [I] \quad (1.3.7)$$

なる関係を得る。茲で一言注意して置きたい事がある。それは (1.3.1) 式で "[A]" とは異った "[B]" なる行列を考へ然る後  $[B] \rightarrow [A]$  なる極限値を取ると云ふ一見廻りくといふ方法を採用したが之

$$[I] = - \frac{\varphi([A])}{2\pi j} \oint_{\odot} \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha [Q] - [A])^{-1} d\alpha$$

となせば, (1.1.3) 式に依り  $\varphi([A]) = [0]$  なる事より  $[I] = [0]$  となつて所期の目的<sup>(1.1)</sup>は無いのである。従つて結局次の結論を得る。

行列 [A] の任意の整式  $F([A])$  は行列 [A] の特有整式を  $\varphi(\alpha)$  とせば " $\varphi(\alpha) = 0$  の根, 換言すれば, 行列 [A] の特有根に重根が存在すると否とに拘らず"

$$F([A]) = - \lim_{[B] \rightarrow [A]} \left[ \frac{\varphi([B])}{2\pi j} \oint_{\odot} \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} (\alpha [Q] - [B])^{-1} d\alpha \right] \quad (1.3.8)$$

なる関係がある。但し行列 [B] は, その何れの特有根も 行列 [A] の特有根の何れとも等しからず " $\varphi([B]) \neq [0]$  なる如き任意の行列" 1.1 にて, その次数は [A] と等しいとする。又積分路 C は  $\varphi(\alpha) = 0$  なる特異点のみをその内部包含する様選定せられた任意の閉曲線で "その上を正方向に一周して積分するもの" とする。

これ所期の周回積分に依つて表示せられた Sylvester の定理であつて, 行列 [A] の特有根に重根が存在すると否とに拘らず (1.3.8) 式にて表へられる。

## [例題]

1)  $[A]^n$  の値を求め

(1.3.8)式に於て, 今の場合  $F([A]) = [A]^n$ ,  $F(\alpha) = \alpha^n$  であり, 今任意の本根  $\alpha_i$  に於ける留数を  $[R_i]$  とせば

$$\begin{aligned} [A]^n &= - \lim_{[B] \rightarrow [A]} [\Gamma_i] = - \lim_{[B] \rightarrow [A]} \varphi([B])[R_i] \\ [\Gamma_i] &= \varphi([B])[R_i] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [A]^n &= - \lim_{[B] \rightarrow [A]} [\Gamma_i] \\ [\Gamma_i] &= \varphi([B])[R_i] \end{aligned}} \right\} \quad (1.3.9)$$

となる。

a) 行列  $[A]$  の特根  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  が互に単根なる場合

$$\begin{aligned} [\Gamma_i] &= \alpha_i^n \frac{1}{\varphi'(\alpha_i)} (\alpha_i [II] - [B])^{-1} \varphi([B]) \\ \varphi'(\alpha_i) &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_i} (\alpha - \alpha_i) / \varphi(\alpha) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [\Gamma_i] &= \alpha_i^n \frac{1}{\varphi'(\alpha_i)} (\alpha_i [II] - [B])^{-1} \varphi([B]) \\ \varphi'(\alpha_i) &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_i} (\alpha - \alpha_i) / \varphi(\alpha) \end{aligned}} \right\} \quad (1.3.10)$$

然るに

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= (-1)^m (\alpha_1 - \alpha)(\alpha_2 - \alpha) \dots (\alpha_m - \alpha) \\ \varphi([B]) &= (-1)^m (\alpha_1 [II] - [B])(\alpha_2 [II] - [B]) \dots (\alpha_m [II] - [B]) \end{aligned}$$

なるを以て, 上式及び(1.3.10)式を(1.3.9)に代入すれば

$$[A]^n = \sum_{i=1}^m \alpha_i^n \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\alpha_j [II] - [A])}{\prod_{j=1}^m (\alpha_j - \alpha_i)} \quad (1.3.11)$$

尚行列  $[A]$  の特根中絶対値の最大なるものを  $\alpha_1$  とせば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [A]^n = \alpha_1^n \frac{\prod_{j=2}^m (\alpha_j [II] - [A])}{\prod_{j=2}^m (\alpha_j - \alpha_1)} \quad (1.3.11)'$$

b) 行列  $[A]$  の特根が  $\alpha_1$  ( $m_1$  重根),  $\alpha_2$  ( $m_2$  重根),  $\dots, \alpha_s$  ( $m_s$  重根) (但し  $m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$ ) なる場合

$$[\Gamma_i] = \frac{\varphi([B])}{(m_i - 1)!} \left\{ \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} \alpha^n (\alpha - \alpha_i)^{m_i} (\alpha [II] - [B])^{-1} \right\}_{\alpha=\alpha_i} \quad (1.3.12)$$

今簡単の爲に

$$\frac{\varphi([B])}{\varphi(\alpha)} (\alpha - \alpha_i)^{m_i} (\alpha [II] - [B])^{-1} = [Q_i(\alpha)] \quad (1.3.13)$$

と置けば

$$[\Gamma_i] = \frac{1}{(m_i - 1)!} \left\{ \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} \alpha^n Q_i(\alpha) \right\}_{\alpha=\alpha_i}$$

となる。従つて  $n - m_i + 1 \geq 0$  ならば

$$\begin{aligned}
 [\Gamma_i] &= \sum_{l=0}^{m_i-1} \frac{n!}{l!(m_i-l-1)!(n-l)!} \alpha_i^{n-l} \left\{ \frac{d^{m_i-l-1}}{d\alpha^{m_i-l-1}} [Q_i(\alpha)] \right\}_{\alpha=\alpha_i} \\
 &= \frac{n!}{(m_i-1)!} \left\{ \frac{\alpha_i^{n-m_i+1}}{(n-m_i+1)!} [Q_i(\alpha_i)] + \frac{(m_i-1)\alpha_i^{n-m_i+2}}{(n-m_i+2)!} \frac{d}{d\alpha} [Q_i(\alpha)]_{\alpha=\alpha_i} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{\alpha_i^n}{n!} \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} [Q_i(\alpha)]_{\alpha=\alpha_i} \right\} \quad (1.3.14)
 \end{aligned}$$

次に " $n-m_i+1 < 0$  ならば"

$$\begin{aligned}
 [\Gamma_i] &= \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l!(m_i-l-1)!(n-l)!} \alpha_i^{n-l} \left\{ \frac{d^{m_i-l-1}}{d\alpha^{m_i-l-1}} [Q_i(\alpha)] \right\}_{\alpha=\alpha_i} \\
 &= \left\{ \frac{1}{(m_i-n-1)!} \frac{d^{m_i-n-1}}{d\alpha^{m_i-n-1}} [Q_i(\alpha)] + \frac{n\alpha}{1!(m_i-n)!} \frac{d^{m_i-n}}{d\alpha^{m_i-n}} [Q_i(\alpha)] \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{\alpha^n}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} [Q_i(\alpha)] \right\}_{\alpha=\alpha_i} \quad (1.3.14)'
 \end{aligned}$$

(1.3.14) 或は (1.3.14)' 式を (1.3.9) 式に代入すれば "所要の  $[A]^n$  の値を得る。

次に "行列  $[A]$  の特有根中絶対値の最大なるものを  $\alpha_1$  とせば" (1.3.14) 式より

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} [A]^n &= - \lim_{[B] \rightarrow [A]} \frac{n! \alpha_1^{n-m_1+1}}{(m_1-1)!(n-m_1+1)!} [Q_1(\alpha_1)] \\
 &\cong - \lim_{[B] \rightarrow [A]} \frac{n^{m_1-1} \alpha_1^{n-m_1+1}}{(m_1-1)!} [Q_1(\alpha_1)] \quad (1.3.15)
 \end{aligned}$$

さらに仮定に依り

$$\begin{aligned}
 \varphi(\alpha) &= (\alpha - \alpha_1)^{m_1} (\alpha - \alpha_2)^{m_2} \dots (\alpha - \alpha_s)^{m_s} \\
 \varphi([B]) &= ([B] - \alpha_1 [I])^{m_1} ([B] - \alpha_2 [I])^{m_2} \dots ([B] - \alpha_s [I])^{m_s}
 \end{aligned}$$

なるを以て、上式及び (1.3.13) 式を (1.3.15) 式に代入すれば"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [A]^n \cong \frac{n^{m_1-1}}{(m_1-1)!} \alpha_1^{n-m_1+1} \frac{([A] - \alpha_1 [I])^{m_1-1} \prod_{i=2}^s ([A] - \alpha_i [I])^{m_i}}{\prod_{i=2}^s (\alpha_1 - \alpha_i)^{m_i}} \quad (1.3.15)'$$

2).  $[I] + [A] + [A]^2 + \dots + [A]^n$  の値を求め。

今  $[\Gamma_i]$  なる行列を例題 1) と同様に定義する。即ち 今の場合を (1.3.8) 式の任意の極  $\alpha_i$  に於ける留数を  $[R_i]$  とせば"

$$\begin{aligned}
 [I] + [A] + [A]^2 + \dots + [A]^n &= - \lim_{[B] \rightarrow [A]} [\Gamma_i] \\
 [\Gamma_i] &= \varphi([B]) [R_i] \quad \left. \vphantom{[I] + [A] + [A]^2 + \dots + [A]^n} \right\} \quad (1.3.16)
 \end{aligned}$$

故て

$$F([A]) = [0] + [A] + [A]^2 + \dots + [A]^n$$

$$F(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n$$

である。

a) 行列  $[A]$  の特有根が  $n$  個単根なる場合

特有根を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  とせば

$$[\Gamma_i] = (1 + \alpha_i + \alpha_i^2 + \dots + \alpha_i^n) \frac{1}{\varphi'(\alpha_i)} (\alpha_i [0] - [B])^{-1} \varphi([B])$$

$$= \begin{cases} -\frac{1 - \alpha_i^{n+1}}{1 - \alpha_i} \frac{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^m (\alpha_r [0] - [B])}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^m (\alpha_r - \alpha_i)} & (\alpha_i \neq 1) \\ -(n+1) \frac{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^m (\alpha_r [0] - [B])}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^m (\alpha_r - 1)} & (\alpha_i = 1) \end{cases} \quad (1.3.17)$$

従って

$$[0] + [A] + [A]^2 + \dots + [A]^n = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \frac{1 - \alpha_i^{n+1}}{1 - \alpha_i} \frac{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^m (\alpha_r [0] - [A])}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^m (\alpha_r - \alpha_i)} & (1 \text{ なる特有根の無い場合}) \\ (n+1) \frac{\prod_{\substack{r=2}}^m (\alpha_r [0] - [A])}{\prod_{\substack{r=2}}^m (\alpha_r - 1)} + \sum_{i=2}^m \frac{1 - \alpha_i^{n+1}}{1 - \alpha_i} \frac{\prod_{\substack{r=2 \\ r \neq i}}^m (\alpha_r [0] - [A])}{\prod_{\substack{r=2 \\ r \neq i}}^m (\alpha_r - \alpha_i)} & (\alpha_1 = 1 \text{ なる場合}) \end{cases} \quad (1.3.18)$$

b) 行列  $[A]$  の特有根に重根が存在する場合

特有根を  $\alpha_1 (m_1 \text{ 重根}), \alpha_2 (m_2 \text{ 重根}), \dots, \alpha_s (m_s \text{ 重根})$  (但し  $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$ ) とすれば

$$[\Gamma_i] = \frac{1}{(m_i - 1)!} \left\{ \frac{d^{m_i - 1}}{d\alpha^{m_i - 1}} \{ F(\alpha) [Q_i(\alpha)] \} \right\}_{\alpha = \alpha_i}$$

$$= \sum_{l=0}^{m_i - 1} \frac{1}{l! (m_i - l - 1)!} \left\{ \frac{d^l F(\alpha)}{d\alpha^l} \cdot \frac{d^{m_i - l - 1} [Q_i(\alpha)]}{d\alpha^{m_i - l - 1}} \right\}_{\alpha = \alpha_i} \quad (1.3.19)$$

但し上式中の  $[Q_i(\alpha)]$  は (1.3.13) 式と同じで、 $\sum_{l=0}^{m_i - 1}$  なる記号は  $n - m_i + 1 \geq 0$  なる時は  $\sum_{l=0}^{m_i - 1}$ ,  $n - m_i + 1 < 0$  なる時は  $\sum_{l=0}^n$  の意である。さて今の場合には

$$\left. \frac{d^l F(\alpha)}{d\alpha^l} \right|_{\alpha = \alpha_i} = \frac{n!}{(n-l)!} \alpha_i^{n-l} + \frac{(n-1)!}{(n-l-1)!} \alpha_i^{n-l-1} + \dots + l! \quad (1.3.20)$$

である。従って (1.3.19) 式を (1.3.16) 式に代入すれば所要の値を得る。



#### 1.4 行列 $[A]$ の最小整式が $Q(\alpha)$ なる場合に対する Sylvester の定理の諸形式

林 重憲教授は、 $m$  次の行列  $[A]$  が満足する最小整式が  $Q(\alpha)$  ではなく、 $\alpha$  に関する二次式 (てくぬ)  $Q(\alpha)$  なりとすれば、

$$Q([A]) = [0] \quad (1.4.1)$$

なる関係あることを利用し、 $Q(\alpha) = 0$  の根が  $m$  重根なる場合に就いて、Sylvester の定理をより簡単な形に表現し得ることを明らかにされた。<sup>(3)</sup> 茲で<sup>(3)</sup>は、左を更に  $Q(\alpha) = 0$  が任意の重度の重根を有する場合に対して拡張し、且つ之が重根の有無に拘らず、或る周辺積分に依つて統一的に表現せらるる事を示す。

先づ記述の便宜上 林 教授の所論の概容を述べれば次の如くである。即ち (1.4.1) 式に依れば、今の場合には  $[A]$ ,  $[A]^2$ ,  $\dots$ ,  $[A]^m$  が一次的に關聯してゐる故行列  $[A]$  に関する任意の整式  $F([A])$  は (1.1.15) 式に代つて次式で表される。

$$\begin{aligned} F([A]) &= e_1(\alpha_2[I] - [A])(\alpha_3[I] - [A]) \dots (\alpha_n[I] - [A]) \\ &\quad + e_2(\alpha_1[I] - [A])(\alpha_3[I] - [A]) \dots (\alpha_n[I] - [A]) \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + e_n(\alpha_1[I] - [A])(\alpha_2[I] - [A]) \dots (\alpha_{n-1}[I] - [A]) \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

但し  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  は  $Q(\alpha) = 0$  の根にして互に相異なるものとある。又  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は適当に選定せられた常數である。然して今の場合には

$$\left. \begin{aligned} Q(\alpha) &= (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \dots (\alpha - \alpha_n) \\ Q([A]) &= ([A] - \alpha_1[I])([A] - \alpha_2[I]) \dots ([A] - \alpha_n[I]) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.3)$$

なるを以て (1.4.2) 式は更に

$$\begin{aligned} F([A]) &= (-1)^{n-1} [e_1(\alpha_1[I] - [A])^{-1} + e_2(\alpha_2[I] - [A])^{-1} + \dots \\ &\quad + e_n(\alpha_n[I] - [A])^{-1}] Q([A]) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

と表す事が出来る。上式は (1.1.6) 式に於て  $m$  の代りに  $n$ ,  $\varphi$  の代りに  $Q$  と書いたに過ぎないのであつて、(1.1.6) 式以下と全く同様にして (1.1.12) 式に對應して次式を得る。

$$F([A]) = - \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{F(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} (\alpha - \alpha_i)(\alpha[I] - [A])^{-1} \right]_{\alpha=\alpha_i} \right\} Q([A]) \quad (1.4.5)$$

或は (1.4.3) 式を代入して

$$F([A]) = \sum_{i=1}^n F(\alpha_i) \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_j[I] - [A])}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_j - \alpha_i)} \quad (1.4.5')$$

之れ上述の 林 教授の誘導せられた関係式である。尚前述せる如く、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  は



$Q(\alpha)=0$  の根で決して  $\varphi(\alpha)=0$  の根ではない。然し  $Q(\alpha)$  は行列  $[A]$  の最小整式であるから  $\varphi(\alpha)$  は  $Q(\alpha)$  にて割り切れ<sup>(4)</sup>

$$\varphi(\alpha) = q(\alpha) Q(\alpha) \quad (1.4.6)$$

と表すことが出来、 $Q(\alpha)=0$  の根は  $\varphi(\alpha)=0$  の根の一部であることを注意を要する。

以上は  $Q(\alpha)=0$  が重根を持たぬ場合の公式であるが、重根を持つ場合には 1.2 に於けると全篇に於て (1.2.9) 式に対応して次式を得る。

$$F([A]) = - \sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} \left\{ \frac{F(\alpha)}{Q_i(\alpha)} (\alpha[I] - [A])^{-1} \right\} \right]_{\alpha=\alpha_i} Q([A]) \quad (1.4.7)$$

但し  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  は  $Q(\alpha)=0$  の根に於て夫々  $m_1$  重根,  $m_2$  重根,  $\dots, m_s$  重根 ( $m_1+m_2+\dots+m_s=2$ ) に於て

$$Q_i(\alpha) = \frac{Q(\alpha)}{(\alpha-\alpha_i)^{m_i}} = (\alpha-\alpha_1)^{m_1} (\alpha-\alpha_2)^{m_2} \dots (\alpha-\alpha_{i-1})^{m_{i-1}} (\alpha-\alpha_{i+1})^{m_{i+1}} \dots (\alpha-\alpha_s)^{m_s} \quad (1.4.8)$$

である。

一方之が周回積分表示には次の積分を考へればよい。

$$[I] = - \frac{Q([B])}{2\pi j} \int_{(K)} \frac{F(\alpha)}{Q(\alpha)} (\alpha[I] - [B])^{-1} d\alpha \quad (1.4.9)$$

但し行列  $[B]$  は  $[A]$  と同次で、 $Q(\alpha)=0$  の根を特異根とせず、 $Q([B]) \neq [0]$  なる如き行列とする。又積分路  $K$  は  $Q(\alpha)=0$  なる特異根のみを包てその内部に包含する様設定せられた任意の閉曲線に於て、その上を正方向に一周積分するものとする。従つて若し  $Q(\alpha)=0$  の根  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  が於て単根なる時は留数定理に依り

$$[I] = - \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{F(\alpha)}{Q(\alpha)} (\alpha-\alpha_i) (\alpha[I] - [B])^{-1} \right\}_{\alpha=\alpha_i} Q([B]) \quad (1.4.10)$$

となり、 $Q(\alpha)=0$  の根が  $\alpha_1$  ( $m_1$  重根),  $\alpha_2$  ( $m_2$  重根),  $\dots, \alpha_s$  ( $m_s$  重根) (且し  $m_1+m_2+\dots+m_s=2$ ) なる時は、

$$[I] = - \sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}}{d\alpha^{m_i-1}} \left\{ \frac{F(\alpha)}{Q_i(\alpha)} (\alpha[I] - [B])^{-1} \right\} \right]_{\alpha=\alpha_i} Q([B]) \quad (1.4.11)$$

となる。従つて (1.4.4), (1.4.7) 及び (1.4.10) 並び (1.4.11) より  $Q(\alpha)=0$  の根の中には重根が存在する否とに拘らず

$$F([A]) = - \lim_{[B] \rightarrow [A]} \frac{Q([B])}{2\pi j} \int_{(K)} \frac{F(\alpha)}{Q(\alpha)} (\alpha[I] - [B])^{-1} d\alpha \quad (1.4.12)$$

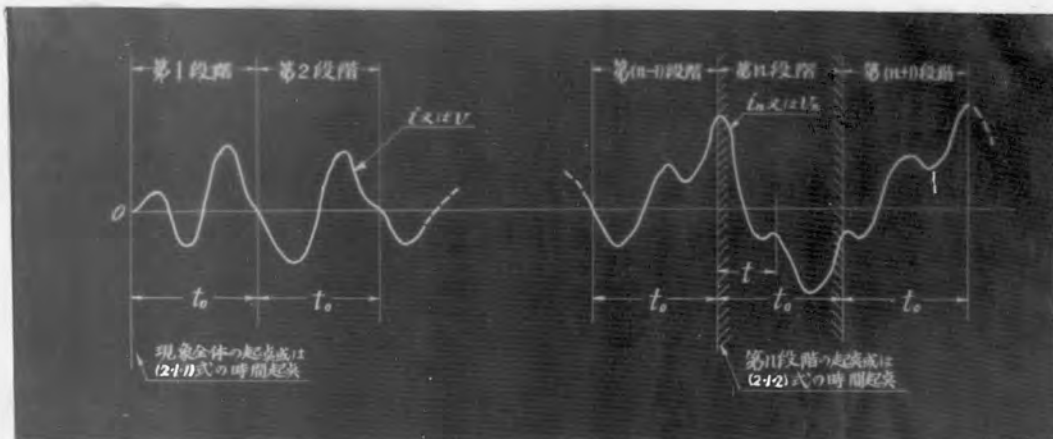
となる。之は所期の関係式である。

但し上式は (1.3.8) 式の  $\varphi$  を形式的に  $Q$  を以て置換へたものに等しい。但し

(1.3.8)式の積分路Cが" $P(\alpha)=0$ なる極を凡てその中に包含するのに対して, (1.4.12)式の積分路Kは  $P(\alpha)=0$  の一部  $Q(\alpha)=0$  なる極のみをその中に包含すれば"充分である。従ってその計算は前に  
 比して 2 倍ばかりになる程容易となる。

第 2・1・1 表

$[Z(D)] = [L]D + [R]$	$D = \frac{d}{dt}$
	$[L]$ : インダクタンス行列 $[R]$ : 抵抗行列
$[Y(D)] = [C]D + [G]$	$[C]$ : キャパシタンス行列 $[G]$ : 漏洩行列
$[\lambda]$ 及び $[\mu]$	0, +1 又は -1 を元素とする行列
$[i]$	過渡電流を元素とする行列
$[v]$	過渡電位を元素とする行列
$[e(t)]$	周期的起電力の一周期の値を元素とする行列
$[s(t)]$	周期的強制電流の一周期の値を元素とする行列



第 2・1・1 図

## 第2章 周期的印加起電力並びに強制電流によって 誘起される電位並びに電流の新解析法<sup>(5)</sup>

### 2.1 過渡電位及び電流の一般算定公式

回路構成の様子は現象全般を通じて改変を受けず、回路状態が唯一個のみよりなり、単に印加起電力並びに強制電流群が周期的に変動する場合に在つては、所要の過渡電位並びに電流を決定すべき微分方程式は凡ゆる時面を通じて

$$\begin{pmatrix} [Z(D)] [L] \\ [\mu] [Y(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [i] \\ [v] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e(t)] \\ [\Delta(t)] \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

なる單一形式を以て表現し得る。<sup>(6)~(7)</sup>但し上式に用ひられた諸記号の意味は表2.1.1表に與へられる如きものである。

次に断續回路の過渡現象の解析法に対する林教授の想念を、<sup>(8)~(10)</sup>(2.1.1)式に適用して見よう。この爲に  $[e(t)]$  及び  $[\Delta(t)]$  の各要素が「有する周期の最小公倍數を」とし、現象を時面的に等間隔を以て逐次区分して行く。然る時は現象起動の当初より  $n$  番目の分別区画に対する微分方程式として (2.1.1) 式と同形で「はあるが」、時面の原素を  $n$  区間の初期に取る事に依り、之には些か物理的内容を異にする次式を導出する事が出来る。

$$\begin{pmatrix} [Z(D)] [L] \\ [\mu] [Y(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_n(t)] \\ [\Delta_n(t)] \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

(2.1.1) 式と (2.1.2) 式の相違は、前者に在つては時面  $t$  の原素を現象發生の当初に固定してあるのに反し、後者は  $n$  段階の現象起動の初期を以て  $t_0$  に充てたる處にある。<sup>(6)~(7)</sup>

又て  $[i_n]$ ,  $[v_n]$ ,  $[L]$  及び  $[C]$  の各1種初期値を夫々  $[i_n^0]$ ,  $[v_n^0]$ ,  $[L^0]$  及び  $[C^0]$  とすれば

$$\begin{pmatrix} [i_n^0] \\ [v_n^0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix} \quad t=t_0$$

にて且つ此の場合に在つては、仮定に依り回路構成の様子は何ら改変を受けないから、

$$[L^0] = [L]$$

$$[C^0] = [C]$$

なる可きを以て、(2.1.2) 式より  $[i_n]$ ,  $[v_n]$  の  $n$  組數  $[I_n]$ ,  $[V_n]$  を決定すべき代數方程式は下言ひの如くなるのである。

$$\begin{pmatrix} [Z(p)] [L] \\ [\mu] [Y(p)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [I_n] \\ [V_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [E_n(p)] \\ [S_n(p)] \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} [L] [O] \\ [O] [C] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [I_{n-1}] \\ [V_{n-1}] \end{pmatrix} \Big|_{t=t_0} \quad (2.1.3)$$

今簡単の爲に

$$[F(p)] = \begin{pmatrix} [Z(p)] [L] \\ [\mu] [Y(p)] \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.1.4)$$

と置けば, (2.1.3)式より

$$\begin{pmatrix} [I_n] \\ [V_n] \end{pmatrix} = [F(p)] \begin{pmatrix} [E_n(p)] \\ [S_n(p)] \end{pmatrix} + p [F(p)] \begin{pmatrix} [L] [O] \\ [O] [C] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [I_{n-1}] \\ [V_{n-1}] \end{pmatrix} \Big|_{t=t_0} \quad (2.1.5)$$

従つて所要の七函数  $[i_n], [v_n]$  は上式より直ちに

$$\begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [\varphi(t)] + [\chi(t)] \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix} \Big|_{t=t_0} \quad (2.1.6)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(t)] &= \tilde{\mathcal{S}}_0 [F(p)] \begin{pmatrix} [E_n(p)] \\ [S_n(p)] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} [E_n(p)] \\ [S_n(p)] \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{S}}_0^{-1} \begin{pmatrix} [E_n(t)] \\ [S_n(t)] \end{pmatrix} \\ [\chi(t)] &= \tilde{\mathcal{S}}_0 p [F(p)] \begin{pmatrix} [L] [O] \\ [O] [C] \end{pmatrix} = [f(t)] \begin{pmatrix} [L] [O] \\ [O] [C] \end{pmatrix} \\ [f(t)] &= \tilde{\mathcal{S}}_0 p [F(p)] \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

但し  $\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mathcal{S}}^{-1}$  なる記号は次ぎの如き演算を意味するものとする。

$$\tilde{\mathcal{S}} K(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K(p)}{p} e^{pt} dp, \quad \tilde{\mathcal{S}}^{-1} k(t) = p \int_0^\infty k(t) e^{-pt} dt$$

斯くして得られた (2.1.6) 式に於て  $t=t_0$  と置き,  $n$  を 1 より逐次変化増大せしめる時は, 茲に所謂漸化式が得られ, 之を解すれば“結局次式を得るのである”。

$$\begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix} = [k_{n-1}(t_0)] + [l_{n-1}(t_0)] \quad (2.1.8)$$

但し

$$[k_{n-1}(t_0)] = \{ [0] + [\chi(t_0)] + \dots + [\chi(t_0)]^{n-2} \} [\varphi(t_0)] \quad (2.1.9)_a$$

$$[l_{n-1}(t_0)] = [\chi(t_0)]^{n-1} \begin{pmatrix} [i_0] \\ [v_0] \end{pmatrix} \quad (2.1.9)_b$$

茲に  $[i_0]$  及び  $[v_0]$  は夫々第一段階の初期に於ける電流及び電圧の第一種初期値である。(2.1.8)を (2.1.6) 式に代入すれば,

$$\begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [\varphi(t)] + [\chi(t)] \{ [k_{n-1}(t_0)] + [l_{n-1}(t_0)] \} \quad (2.1.10)$$



とする。これら所要の電流並びに電圧の過渡値 ( $n < \infty$  なる場合) を算定すべき一般公式である。尚  $[i_{n-1}(t_0)]$  及び  $[v_{n-1}(t_0)]$  中の  $\{[i_0] + [x(t_0)] + \dots + [x(t_0)]^{n-2}\}$  及び  $[x(t_0)]^{n-1}$  なる項は 1.3 の例題に既述の諸公式を用いて算定すれば良い。然し乍ら

$$\delta\{[i_0] - [x(t_0)]\} \neq 0 \quad (2.1.11)$$

なる時、換言すれば、 $[x(t_0)]$  が 1 なる特有根を有たざる場合には (2.1.9)<sub>a</sub> 式は

$$[i_{n-1}(t_0)] = ([i_0] - [x(t_0)])^{-1} ([i_0] - [x(t_0)]^{n-1}) [\varphi(t_0)] \quad (2.1.9)'_a$$

となるので、(2.1.10) 式は次の如くなる。

$$\begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [\varphi(t)] + [x(t)] \left\{ ([i_0] - [x(t_0)])^{-1} ([i_0] - [x(t_0)]^{n-1}) [\varphi(t_0)] + [x(t_0)]^{n-1} \begin{pmatrix} [i_0^-] \\ [v_0^-] \end{pmatrix} \right\} \quad (2.1.10)'$$

然して上式中の  $[x(t_0)]^{n-1}$  なる値は (1.3.11), (1.3.14) 或は (1.3.14)', 並びに (1.3.10)' 及び (1.3.15)' に依つて計算すれば良い。

## 2.2 安定問題

常数係数線形回路の安定問題は、制御系或は饋電系の安定度の問題に密着して種々なる觀察より論議されて来たところである<sup>(11)</sup>。然るに曩に林重憲教授が「誘起せられた断続回路の安定状態の判別法」<sup>(12)</sup>の思想を今の場合に適用すれば、茲に常数係数線形回路の安定領域の一判別法を得る。

先づ (2.1.6) 式の物理的意味を考へるに、 $[\varphi(t)]$  なる項は、 $n$  周期目の初期より作用し始める駆動力  $[e_n(t)]$  及び  $[d_n(t)]$  に依つて誘起せられる現象を表し、 $[x(t)] \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix}_{t=t_0}$  なる項は、 $n$  周期目の各種初期値に依つて誘起される現象、

換言すれば、 $n$  周期目までに生起せる諸現象の履歴として、 $(n-1)$  周期目の終りにその回路に残存せる電流及び電圧に依つて誘起された現象を表してゐる。然して (2.1.9)<sub>a</sub> の  $[i_{n-1}(t_0)]$  なる値は  $(n-1)$  周期の終末時までの間に印加された起電力及び電制電流に依つて誘起せられた電流並びに電圧の  $(n-1)$  周期の終末に方々ける値を意味する。一ち (2.1.9)<sub>b</sub> の  $[v_{n-1}(t_0)]$  なる値は、現象始動の瞬間に該回路に存在してゐた電流  $[i_0^-]$  及び電圧  $[v_0^-]$  に起因する終末値である。然るに  $[i_0^-]$  及び  $[v_0^-]$  は又現象始動の瞬間に該回路にかけられた擾乱 (Disturbance) と考へる事が出来る。<sup>\*</sup> 従つて該回路が安定なる爲には

\* 次頁脚註参照



$$\lim_{n \rightarrow \infty} [k_{n+1}(t_0)] \neq [\infty]$$

(2.2.1)<sub>a</sub>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [l_{n+1}(t_0)] \neq [\infty]$$

(2.2.1)<sub>b</sub>

なる事を要する。即ち上記の二条件が同時に満足される時は(2.1.10)式より明かた如く  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix}$  は有根値を取り所謂安定な状態が存在する事になる。依つて以

下(2.2.1)<sub>a</sub>及び(2.2.1)<sub>b</sub>なる条件の成立する範囲を吟味する。

(1)  $[\varphi(t_0)] = [0]$  なる場合 (周期的駆動力が全く作用しない場合を含む)

(2.1.9)<sub>a</sub>式より明かに

$$[k_{n+1}(t_0)] = [0]$$

(2.2.2)

なるを以て、(2.2.1)<sub>b</sub>なる条件のみが成立すれば、該回路は安定である。然るに  
 $[l_{n+1}(t_0)]$  中に含まれてゐる  $[x(t_0)]^{n-1}$  なる値は(1.3.11), (1.3.11)' 並びに(1.3.14)',  
 (1.3.15)' に依つて算定せらるゝを以て(2.2.1)<sub>b</sub>なる条件の成立する範囲は表2.2.1表  
 に示すか如くになる。但し  $\alpha_1$  は  $[x(t_0)]$  の特有根中絶対値の最大なるものを意味する。

(2)  $[\varphi(t_0)] \neq [0]$  なる場合

表2.2.1表

今の場合(2.2.1)<sub>a</sub>及び(2.2.1)<sub>b</sub>

なる二つの条件が同時に満足  
 される時如きめて該回路は安

$ \alpha_1 $	$\alpha_1$ : 單根	$\alpha_1$ : 重根
$ \alpha_1  > 1$	不安定	不安定
$ \alpha_1  = 1$	安定	不安定
$ \alpha_1  < 1$	安定	安定

定となるか(2.2.1)<sub>b</sub>なる条件の成立する範囲に就いては、既に上に論じた  
 處で、茲では(2.2.1)<sub>a</sub>なる条件を吟味すれば充分である。

a).  $[x(t_0)]$  の特有根中に1なる根が存在しない場合

斯き場合の  $[k_{n+1}(t_0)]$  は(2.1.9)<sub>a</sub>式にて與へられ該式中の  $[x(t_0)]^{n-1}$  なる項  
 に(1.3.11)或は(1.3.14)'を適用する時は前と同様に安定領域を決定する  
 事が出来る。

b).  $[x(t_0)]$  の特有根中に1なる特有根が存在する場合

或る周期目の初期に  $[i_0^0]$  及び  $[v_0^0]$  なる擾亂が加へられた場合には  
 (2.1.9)<sub>b</sub>式に対応して

$$[l_{n+1}(t_0)] = [x(t_0)]^{n-1} \begin{pmatrix} [i_0^0] \\ [v_0^0] \end{pmatrix}$$

なる式を採用すべきであり、又或る周期目の  $t_0$  なる瞬間に加へられた場合には

$$[l_{n+1}(t_0)] = [x(t_0)]^{n-2} [x(t_0 - t)] \begin{pmatrix} [i_0^0] \\ [v_0^0] \end{pmatrix}$$

なる式を採用すべきである。

斯の場合には  $[f_{n-1}(t_0)]$  は (2.19) 式を以て論じなければならぬ。此の場合には (1.3.15)' 及び (1.3.18) 式が明かにならず、1 なる特有根が単根たると重根たるとを問はず  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f_{n-1}(t_0)] = [\infty]$  にて不安定である。斯様にて得られた結果を一掃表示すれば、オ 2.2.2 表の如くである。但し  $\alpha_i$  は  $[X(t_0)]$  の特有根中絶対値の最大なる根を意味する事はオ 2.2.1 表に於けると同様である。

オ 2.2.2 表

$ \alpha_i $	$\alpha_i$ : 単根	$\alpha_i$ : 重根
$ \alpha_i  > 1$	不安定	不安定
$ \alpha_i  = 1$	$\alpha_i = 1$ : 不安定	不安定
	$\alpha_i \neq 1$ : 安定	
$ \alpha_i  < 1$	安定	安定

オ 2.2.1 表に於けると同様である。

初て上述の判別法を利用せんとする時は  $[X(t_0)]$  の特有根を必要とし、之が為には  $[X(t_0)]$  そのものを計算しなければならぬ。然し乍ら  $[X(t_0)]$  を計算する事は極めて機械

的ではあるが、行列の次数が大となるに従つて加速度的に煩鎖の度が増すのが常であつて、實際上 行列の次数が 4 以上の場合には数値計算は比較的容易であつても、文字式に依る計算は不可能に近い。

然るに回路の安定問題のみを論ずる場合には、 $[X(t_0)]$  の特有根が必要で、敢て  $[X(t_0)]$  そのもの、値を必要としない。従つて  $[X(t_0)]$  の特有根を、 $[X(t_0)]$  そのものの値を知る事なしに簡単に決定する方法が“存在すれば”、回路の安定問題を論ずる限りに於ては極めて便利なる事は言を俟たない。

以下斯る目的の為に  $[X(t_0)]$  の特有根の性質を究明し、且つ上述の判別法と、同じ性質の現象の安定度判別法として衆矢の <sup>(2)</sup> Hurwitz の条件式との関係を明らかにしよう。

初て  $m$  箇のリアクタンス素子を含む一般線型回路(以下斯る回路を簡単に  $m$  位回路と呼ぶ)の基礎微分方程式は、一般には (2.1.2) 式にて與へられるが純抵抗素子のみを流れる電流は電磁束を形成せず初期値に無関係なるを以て、之を消去する時は (2.1.2) 式の  $[u]$  及び  $[i_n]$  なる行列の要素も一般には  $D = \frac{d}{dt}$  の一次式となるのが常である。従つて  $m$  位回路に対する基礎微分方程式は下言の如くに表す事も出来る。

$$\begin{pmatrix} a_{11}D+b_{11} & \cdots & a_{1m}D+b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}D+b_{m1} & \cdots & a_{mm}D+b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [i_n] \\ \vdots \\ [u_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_n(t)] \\ \vdots \\ [s_n(t)] \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

以下上式に就て考察を進める。次ぎに簡單の為に

$$\delta[a] = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = 1 \quad (2.2.4)$$

なる仮定を設けるも、問題の一般性を損ふ事はない。何故なら若し  $\delta[a] \neq 1$  ( $\delta[a] \neq 0$  なる事は該回路が  $m$  位回路なる事から明らかである) なる時は (2.2.3) 式左右両辺の係

意の行を  $\delta[A]$  にて除したものを微分方程式として採用すれば良い。今

$$[Q(p)] \equiv \begin{pmatrix} a_{11}p+b_{11} & \cdots & a_{1m}p+b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}p+b_{m1} & \cdots & a_{mm}p+b_{mm} \end{pmatrix} \equiv [A]p + [B] \quad (2.2.5)$$

但し

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

と置き、特性方程式

$$\Delta(p) = \delta[Q(p)] = 0 \quad (2.2.6)$$

の根を  $p_1, p_2, \dots, p_m$  と仮定する。(2.2.5) 及び (2.2.6) 式より

$$\Delta(p) = \delta\{[A]p + [B]\}$$

上式の両辺に  $\delta[A]^{-1} = 1$  (2.2.4 式参照) を乗ずれば

$$\Delta(p) = \delta\{[I]p + [A]^{-1}[B]\} \quad (2.2.7)$$

上式より  $\Delta(p) = 0$  の根  $p_1, p_2, \dots, p_m$  は行列  $-[A]^{-1}[B]$  の特有根なることを知る。今  $p_1, p_2, \dots, p_m$  中に重根が存在しないと仮定すれば (重根が存在する場合は後に論じる)  $-[A]^{-1}[B]$  のに対する Jordan の標準形式<sup>(13)</sup> は  $p_1, p_2, \dots, p_m$  を対角要素とする対角行列にて表へられ、之を  $[\tilde{P}]$  にて表せば

$$[\tilde{P}] = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_m \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

以下異なる記法に準ずることとする。然る時は  $[\tilde{P}]$  と  $-[A]^{-1}[B]$  とは互に相対して、下記の関係式を満足する。<sup>(14)</sup>

$$[N][\tilde{P}][N]^{-1} = -[A]^{-1}[B] \quad (2.2.9)$$

茲に  $[N]$  は  $p$  に無関係な常数を要素とする特異な<sup>(15)</sup>  $m$  次の正交行列である。上式の両辺に  $[N][\frac{I}{p-p_i}]$  を右より乗ずる時は

$$[N]\left[\frac{\tilde{P}}{p-p_i}\right] = -[A]^{-1}[B][N]\left[\frac{I}{p-p_i}\right]$$

或は

$$[N]\left\{[I] - \left[\frac{\tilde{P}}{p-p_i}\right]\right\} = [A]^{-1}[B][N]\left[\frac{I}{p-p_i}\right]$$

従つて

$$[N] = \{[I]p + [A]^{-1}[B]\}[N]\left[\frac{I}{p-p_i}\right] \quad (2.2.10)$$

上式の左から  $p[A]$  を乗じ (2.2.5) 式の関係式を代入すれば

$$p[A][N] = [Q(p)][N]\left[\frac{\tilde{P}}{p-p_i}\right] \quad (2.2.11)$$

然るに今の場合の  $[X(t)]$  の  $p$  函数を  $[Q(p)]$  とせば

$$[Q(p)] = \tilde{S}^{-1} [X(t)] = p [Q(p)]^{-1} [a] \quad (2.2.12)^*$$

なる関係がある。依つて (2.2.11) 式の両辺に左から  $[Q(p)]^{-1}$  右から  $[N]^{-1}$  を乗じ (2.2.10) の関係を利用すれば

$$[Q(p)] = [N] \left[ \frac{\tilde{p}}{p - p_i} \right] [N]^{-1} \quad (2.2.13)$$

となる。従つて我々は上式より次の結果を得る。

結論 I. 特性方程式  $\Delta(p) = 0$  の根を  $p_1, p_2, \dots, p_m$  とすれば  $[X(t)]$  の  $p$  函数行列  $[Q(p)]$  の特有根は  $\frac{p}{p-p_1}, \frac{p}{p-p_2}, \dots, \frac{p}{p-p_m}$  に等へられる。

以上の結果を利用すれば  $[X(t)]$  の特有根が直ちに求まる。即ち前述せる如く (2.2.13) 式中の行列  $[N]$  は  $p$  に無関係な常数を要素とする行列なることに注目し, (2.2.13) 式をも函数に変換すれば,

$$[X(t)] = [N] [e^{\tilde{p}_i t}] [N]^{-1} \quad (2.2.14)$$

即ち次の結論を得る。

結論 II. 特性方程式  $\Delta(p) = 0$  の根を  $p_1, p_2, \dots, p_m$  とすれば,  $[X(t)]$  の特  
有根は  $e^{p_1 t}, e^{p_2 t}, \dots, e^{p_m t}$  に等へられる。

更に結論 I 及び II より

結論 III. 今の場合には  $[X(t)]$  の特有根は  $[Q(p)] = \tilde{S}^{-1} [X(t)]$  の特有根の  $t$  函数にて等へられる。

次に  $\Delta(p) = 0$  の根の中に重根が存在する場合に就て略述する。今  $\Delta(p) = 0$  の根  $p_1, p_2, \dots, p_m$  中に任意の数の任意の重度の重根が存在する場合 (2.2.8) 式に対応する Jordan の標準形式は一般に

$$\begin{pmatrix} p_1 & e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & e_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_m \end{pmatrix}$$

なる形式にて等へられる。但し  $e_i$  ( $i=1, 2, \dots, m-1$ ) なる元素は 0 又は 1 である。然して何れの  $e_i$  が 0 であり, 又何れの  $e_i$  が 1 なるか, 或は又  $p_1, p_2, \dots, p_m$  の中何れと何れ

\* (2.2.3) 式と (2.1.2) 式を比較すれば明かな様に (2.1.7) 式の  $[X(t)]$  を構成する各行列は, 今の場合には下記の如くである事に注意を要する。

$$[H(p)] = [Q(p)], \quad \begin{pmatrix} [L] & [0] \\ [0] & [C] \end{pmatrix} = [a]$$



とが相等しい根であるかは  $-[a]^{-1}[b]$  なる行列の単因子の実際の形を知らねばならぬが以下の論義にはその必要を認めないので、この点に關しては之以上深入りしない、尚以下簡單の爲に

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & B_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & B_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv [\tilde{B}_i] \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \quad (2.2.15)$$

$$[\tilde{A}_i] + [\tilde{B}_i] \equiv [\tilde{A}_i; \tilde{B}_i]$$

なる記法を用ゐれば、今の場合の Jordan の標準形式は  $[\tilde{p}_i; \tilde{e}_i]$  にて與へられ (2.2.9) 式に対応して次の關係を得る。

$$[N][\tilde{p}_i; \tilde{e}_i][N]^{-1} = -[a]^{-1}[b] \quad (2.2.16)$$

然して行列  $[N]$  は常數を要素とする特異ならざる  $m$  次の正方形行列なることは前と同じである。(2.2.16) 式の両辺に  $[N][\frac{\tilde{1}}{p-p_i}]$  を右から乘じ (2.2.15) の 2 式の關係を利用すると

$$[N] \left\{ \left[ \frac{\tilde{p}_i}{p-p_i} \right] + [\tilde{e}_i] \left[ \frac{\tilde{1}}{p-p_i} \right] \right\} = -[a]^{-1}[b][N] \left[ \frac{\tilde{1}}{p-p_i} \right] \quad (2.2.17)$$

上式に

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\tilde{p}_i}{p-p_i} \right] = \left[ \frac{\tilde{p}}{p-p_i} \right] - [\Pi] \quad , \quad [\tilde{e}_i] \left[ \frac{\tilde{1}}{p-p_i} \right] = \left[ \frac{\tilde{e}_i}{p-p_{i+1}} \right] \\ [\Pi] - \left[ \frac{\tilde{e}_i}{p-p_{i+1}} \right] = [\tilde{\gamma}; \frac{-\tilde{e}_i}{p-p_{i+1}}] \end{array} \right. \quad (2.2.18)$$

なる關係を利用すれば前と全く同様にて

$$[\Phi(p)] = [N] \left[ \frac{\tilde{p}}{p-p_i} \right] [C][N]^{-1} \quad (2.2.19)$$

を得る。但し

$$[C] = \left[ \tilde{\gamma}; \frac{-\tilde{e}_i}{p-p_i} \right]^{-1} = \left( \begin{array}{cccc} 1 & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \quad (2.2.20)$$

$$C_{i, i+k} = \prod_{A=i}^{i+k-1} \frac{e_A}{p-p_{A+1}} \quad (k > 0)$$

又 (2.2.20) 式より明らかな如く、 $C_{i, i+k}$  なる要素は一般に  $p$  の函数なるも行列  $[C]$  は三角行列にて且つ対角要素が 1 なるを以て

$$\left[ \frac{\tilde{p}}{p-p_i} \right] [C] = \left( \begin{array}{cccc} \frac{p}{p-p_i} & D_{12} & \cdots & D_{1m} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{p}{p-p_m} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \quad (2.2.21)$$



$$D_{i,i+k} = \frac{p}{p-p_i} C_{i,i+k}$$

となる。然るに行列  $\left[\frac{\tilde{p}}{p-p_i}\right][C]$  の特有根は上式より明かな如く  $\frac{p}{p-p_i}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) にて與へられるから、(2.2.19)式に示す如く行列  $\left[\frac{\tilde{p}}{p-p_i}\right][C]$  と相似の関係にある行列  $[A(p)]$  の特有根も亦  $\frac{p}{p-p_i}$  にて與へられる。即ち前記の結論 I は  $\Delta(p)=0$  が重根を有する場合に対しても成立することが分つた。

次に  $[X(t)]$  の特有根は、行列  $[N]$  が今の場合にも  $p$  に無関係な常数を要素とする行列なるを以て、(2.2.19)及び(2.2.21)式より

$$\left. \begin{aligned} [X(t)] &= [N] \begin{pmatrix} \varepsilon^{p_1 t} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon^{p_m t} \end{pmatrix} [N]^{-1} \\ d_{i,i+k} &= \tilde{d}_{i,i+k} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.22)$$

然して上式右辺の特有根は明らかに  $\varepsilon^{p_i t}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) であるから、 $[X(t)]$  の特有根も亦  $\varepsilon^{p_i t}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) にて與へられる。従つて前記の結論 II 及び III は  $\Delta(p)=0$  が重根を有する場合に対しても成立することが分る。

又て結論 II に依れば、林教授の判別法に利用せられる特有根の絶対値と  $\Delta(p)=0$  の根との間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{p_i t_0}| &> 1 && (\text{不安定の場合}) && (p_i \text{ の実数部}) > 0 \\ |\varepsilon^{p_i t_0}| &= 1 && && (p_i \text{ の実数部}) = 0 \\ |\varepsilon^{p_i t_0}| &< 1 && (\text{安定の場合}) && (p_i \text{ の実数部}) < 0 \end{aligned}$$

従つて特性方程式  $\Delta(p)=0$  の根の実数部の正負如何に依つて該回路の安定問題を論じ得る。換言すれば今の場合  $[X(t_0)]=0$  の特有根を定める迄もなく特性方程式に直ちに Hurwitz の条件式を適用することに依つて該回路の安定或は不安定を論ずる事が出来るのである。

## 2.3 定常電位及び電流の一般算定公式

前節に於て周期的駆動力を受ける常数係数線形回路が安定に動作する為の条件を論じたが、次に各安定領域に於ける定常電位並びに電流の一般算定公式を誘導する。

電流並びに電位の定常値は(2.1.6)式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [\varphi(t)] + [X(t)] \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix}_{t=t_0} \quad (2.3.1)$$

にて與へられるから (2.1.8), (2.1.9)<sub>a</sub> 或は (2.1.9)<sub>a'</sub>, 及び (2.1.9)<sub>b</sub> を利用して  $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix}$

なる値を算定すれば良い。

(1)  $[\varphi(t_0)] \neq [0]$  なる場合

表2.2.2より明かた如く、今の場合の安定領域に於ては  $[\chi(t_0)]$  は1なる特有根を含まないから  $[k_{n+1}(t_0)]$  として (2.1.9)<sub>a</sub> 式を採用することが出来る。従つて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n+1}] \\ [v_{n+1}] \end{pmatrix}_{t=t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ ([\Pi] - [\chi(t_0)]^{-1}([\Pi] - [\chi(t_0)]^{n+1})[\varphi(t_0)] + [\chi(t_0)]^{n+1} \begin{pmatrix} [i_1^0] \\ [v_1^0] \end{pmatrix} \right\} \quad (2.3.2)$$

然るに前述せる如く、上式中の  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\chi(t_0)]^{n+1}$  なる値は (1.3.11)' 或は (1.3.15)' より求まされるから、 $[\chi(t_0)]$  の特有根中絶対値の最大なるものを  $\alpha_1$  とすれば

a)  $|\alpha_1| < 1$  (但し  $\alpha_1$  は單根たると重根たるとを問はず) ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\chi(t_0)]^{n+1} = [0] \quad (2.3.3)$$

となり、(2.3.2) 式は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n+1}] \\ [v_{n+1}] \end{pmatrix}_{t=t_0} = ([\Pi] - [\chi(t_0)]^{-1})[\varphi(t_0)] \quad (2.3.4)$$

従つて所要の定常値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [\varphi(t)] + [\chi(t)]([\Pi] - [\chi(t_0)]^{-1})[\varphi(t_0)] \quad (2.3.5)$$

にて算定せられる。上式に依れば、今の場合の定常状態は、段階(周期)番号  $n$  及び初期値  $[i_1^0], [v_1^0]$  に無関係にて、周期的駆動力並に回路の構成状態のみによつて定まり、且つ一周期毎に同じ状態を繰返すことが分る。

b)  $|\alpha_1| = 1$  即ち  $\alpha_1 = e^{j\omega t_0}$  (但し  $\alpha_1 \neq 1$  即ち  $\omega t_0 \neq 2m\pi$  にて  $\alpha_1$  は單根なるものとす。) ならば、通常  $e^{j\omega t_0}$  も亦  $[\chi(t_0)]$  の特有根として含まれるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\chi(t_0)]^{n+1} = 2 \times \text{Real Part of } e^{j(n+1)\omega t_0} \frac{\prod_{z=2}^m (\alpha_z [\Pi] - [\chi(t_0)])}{\prod_{z=2}^m (\alpha_z - e^{j\omega t_0})} \quad (2.3.6)$$

上式を (2.3.2) 式に代入すれば、所要の定常値を得る。従つて今の場合の定常状態は位相に於て  $n$  に関係し、且つ  $[i_1^0]$  及び  $[v_1^0]$  の値によつても影響を受ける。

(2)  $[\varphi(t_0)] = [0]$  なる場合

今の場合は  $[k_{n+1}(t_0)] = [0]$  なるを以て、(2.1.8), (2.1.9)<sub>a</sub> 及び (2.1.9)<sub>b</sub> より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n+1}] \\ [v_{n+1}] \end{pmatrix}_{t=t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\chi(t_0)]^{n+1} \begin{pmatrix} [i_1^0] \\ [v_1^0] \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

\* 所謂無損失回路がこの場合に當る。

なるを以て, (2.3.1) 式より所要の定常値は次式に依つて與へられる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [\varphi(t)] + [\chi(t)] \lim_{n \rightarrow \infty} [\chi(t_0)]^{n-1} \begin{pmatrix} [i_1^0] \\ [v_1^0] \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

従つて前と同様にして,  $[\chi(t_0)]$  の特有根中絶対値の最大なるものを  $\alpha_1$  とせば

(a)  $|\alpha_1| < 1$  ならば  $(\alpha_1$  が重根たると単根たるとを問はず)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [\varphi(t)] \quad (2.3.9)$$

と成り,  $n$  及び  $[i_1^0][v_1^0]$  に無関係な定常状態に落着く。

(b)  $|\alpha_1| = 1$  ( $\alpha_1$  は單根) にて

(i)  $\alpha_1 = e^{j\omega t_0}$  ( $\neq 1$ ) ならば (2.3.6) 式が適用出来, 之を (2.3.8) 式に代入すれば所要の解を得る。従つて今の場合には位相に於て  $n$  に関係し, 且つ  $[i_1^0][v_1^0]$  に依つても影響される定常状態に落着く。

(ii)  $\alpha_1 = 1$  ならば\* 所要の定常値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [\varphi(t)] + [\chi(t)] \frac{\prod_{k=2}^m (\alpha_k [i] - [\chi(t_0)])}{\prod_{k=2}^m (\alpha_k - 1)} \begin{pmatrix} [i_1^0] \\ [v_1^0] \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

にて與へられ,  $n$  には無関係なるも  $[i_1^0]$  及び  $[v_1^0]$  の影響を受ける。



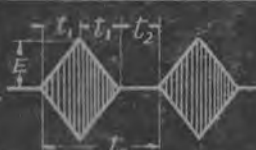
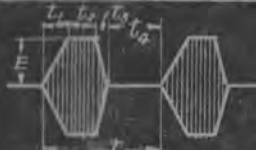

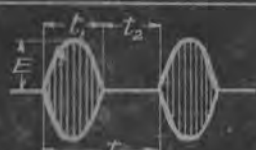
## 2.4 新解析法の特徴と之に使用せらる可き種々なる衝撃駆動力の演算子形

以上数節に亘つて論じ來つた處の新解析法の特徴は解析せんとする現象が不連続点を包含する場合に於ても過渡現象たると定常現象たるとを問はずその解は常に円函数並びに双曲線函数の有限値の組合せに依つて表現せられる点にあり, Fourier級數法の如く無限級數の形は絶対取らない。従つて前述せる如き諸欠点 何れも級數の收斂度或は Gibbs の現象の如きは全く除外することが出来るのであつて, 新解析法に依る解に數値計算を施して現象を曲線に描かせんとする場合極めて正確且つ簡單に行ひ得ることは言ふ處でない。

以上の事實は (2.1.7), (2.1.10) 或は (2.1.10) 及び 1.3 の例題がある程度理解し得るが, その根本的な所以は  $[E_n(t)]$  及び  $[A_n(t)]$  にある。即ち (2.1.7) の第一式中の  $[E_n(p)]$  及び  $[S_n(t)]$  は, 周期的駆動力の單一周期間 ( $0 < t < t_0$ ) に対する  $[E_n(t)]$  及び  $[S_0(t)]$  の  $p$  函数行列でありさへすればよいのであつて, 決して周期的駆動力の全般 ( $0 < t < \infty$ ) に対する  $[E(t)]$ ,  $[A(t)]$  の  $p$  函数行列である必要はないのである。










\* 斯る場合は物理的には實現し難い。

第 2.4.2 表

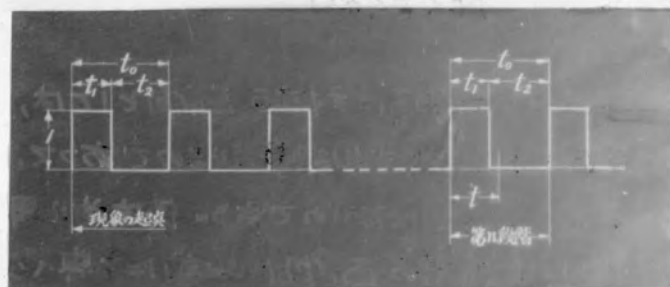
	$e(t)$	$e_n(t)$	$E_n(p)$
矩形波		$ESin(\omega t + \varphi) \{1 - H(t - t_1)\}$	$\frac{E}{p^2 + \omega^2} [\omega p \cos \varphi + p^2 \sin \varphi - \{\omega p \cos(\omega t_1 + \varphi) + p^2 \sin(\omega t_1 + \varphi)\} e^{-pt_1}]$
三角波		$E \left\{ \frac{t}{t_1} - \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) (t - t_1) H(t - t_1) + \frac{t - t_1 - t_2}{t_2} H(t - t_1 - t_2) \right\} Sin(\omega t + \varphi)$	$E \left[ \frac{F(p, \varphi)}{t_1} - \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) F(p, \omega t_1 + \varphi) e^{-pt_1} + \frac{1}{t_2} F(p, \omega \overline{t_1 + t_2} + \varphi) e^{-p(t_1 + t_2)} \right]$
		$\frac{E}{t_1} \left\{ t - 2(t - t_1) H(t - t_1) + (t - 2t_1) H(t - 2t_1) \right\} Sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{E}{t_1} \left\{ F(p, \varphi) - 2F(p, \omega t_1 + \varphi) e^{-pt_1} + F(p, 2\omega t_1 + \varphi) e^{-2pt_1} \right\}$
梯形波		$E \left\{ \frac{t}{t_1} - \frac{(t - t_1)}{t_1} H(t - t_1) - \frac{(t - t_1 - t_2)}{t_3} H(t - t_1 - t_2) + \frac{(t - t_1 - t_2 - t_3)}{t_3} H(t - t_1 - t_2 - t_3) \right\} Sin(\omega t + \varphi)$	$E \left[ \frac{F(p, \varphi) - F(p, \omega t_1 + \varphi) e^{-pt_1}}{t_1} - \frac{\{F(p, \omega \overline{t_1 + t_2} + \varphi) - F(p, \omega \overline{t_1 + t_2 + t_3} + \varphi)\} e^{-pt_3}}{t_3} e^{-p(t_1 + t_2)} \right]$
		$\frac{E}{t_1} \left\{ t - (t - t_1) H(t - t_1) - (t - t_1 - t_2) H(t - t_1 - t_2) + (t - 2t_1 - t_2) H(t - 2t_1 - t_2) \right\} Sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{E}{t_1} \left\{ F(p, \varphi) - F(p, \omega t_1 + \varphi) e^{-pt_1} - \{F(p, \omega \overline{t_1 + t_2} + \varphi) - F(p, \omega \overline{2t_1 + t_2} + \varphi)\} e^{-pt_1} e^{-p(t_1 + t_2)} \right\}$
正弦波		$ESin p t Sin(\omega t + \varphi) \{1 - H(t - t_1)\}$ $p t_1 = \pi$	$\frac{E \beta p}{(p^2 + \omega^2 + \beta^2)^2 - 4\omega^2 \beta^2} [2\omega p \{\cos \varphi + \cos(\omega t_1 + \varphi) e^{-pt_1}\} + (p^2 - \omega^2 + \beta^2) \{\sin \varphi + \sin(\omega t_1 + \varphi) e^{-pt_1}\}]$
備考		$F(p, \varphi) = \int_0^{-1} t \sin(\omega t + \varphi) = \frac{2\omega p^2 \cos \varphi + p(p^2 - \omega^2) \sin \varphi}{(p^2 + \omega^2)^2}$	



第 2.4.1 表

	$\epsilon(t)$	$\epsilon_n(t)$	$E_n(p)$
矩形波		$E - E H(t - t_1)$	$E (1 - \epsilon^{-pt_1})$
三角波		$E \left\{ \frac{t}{t_1} - \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) (t - t_1) H(t - t_1) + \frac{(t - t_1 - t_2)}{t_2} H(t - t_1 - t_2) \right\}$	$\frac{E}{p} \left\{ \frac{1}{t_1} (1 - \epsilon^{-pt_1}) - \frac{1}{t_2} \epsilon^{-pt_1} (1 - \epsilon^{-pt_2}) \right\}$
		$\frac{E}{t_1} \left\{ t - 2(t - t_1) H(t - t_1) + (t - 2t_1) H(t - 2t_1) \right\}$	$\frac{E}{pt_1} (1 - \epsilon^{-pt_1})^2$
梯形波		$E \left\{ \frac{t}{t_1} - \frac{(t - t_1)}{t_1} H(t - t_1) - \frac{(t - t_1 - t_2)}{t_3} \times H(t - t_1 - t_2) + \frac{(t - t_1 - t_2 - t_3)}{t_3} H(t - t_1 - t_2 - t_3) \right\}$	$\frac{E}{p} \left\{ \frac{1}{t_1} (1 - \epsilon^{-pt_1}) - \frac{1}{t_3} \epsilon^{-p(t_1+t_2)} (1 - \epsilon^{-pt_3}) \right\}$
		$\frac{E}{t_1} \left\{ t - (t - t_1) H(t - t_1) - (t - t_1 - t_2) \times H(t - t_1 - t_2) + (t - 2t_1 - t_2) H(t - 2t_1 - t_2) \right\}$	$\frac{E}{pt_1} (1 - \epsilon^{-pt_1}) (1 - \epsilon^{-p(t_1+t_2)})$
锯齿状波		$\frac{Et}{t_0}$	$\frac{E}{pt_0}$
		$E \left\{ \frac{t}{t_1} - \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) (t - t_1) H(t - t_1) \right\}$	$\frac{E}{p} \left\{ \frac{1}{t_1} - \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \epsilon^{-pt_1} \right\}$
正弦波		$E \sin \beta t \{ 1 - H(t - t_1) \}$	$\frac{E \beta p}{p^2 + \beta^2} (1 + \epsilon^{-pt_1})$
		$E \sin \beta (t + t_1) \{ 1 - H(t - t_1) \}$	$\frac{E \beta}{p^2 + \beta^2} \{ \beta \cos \beta t_1 + p \sin \beta t_1 - \{ \beta \cos \beta (t_1 + t_2) + p \sin \beta (t_1 + t_2) \} \epsilon^{-pt_2} \}$





第 2.4.1 図

即ち例へば、 $\omega$ 2.4.1 図の如き周期的矩形波全体に対する  $p$  函数を求めれば

$$E(p) = 1 - e^{-pt_1} + e^{-pt_0} - e^{-p(t_0+t_1)} + e^{-2pt_0} - \dots$$

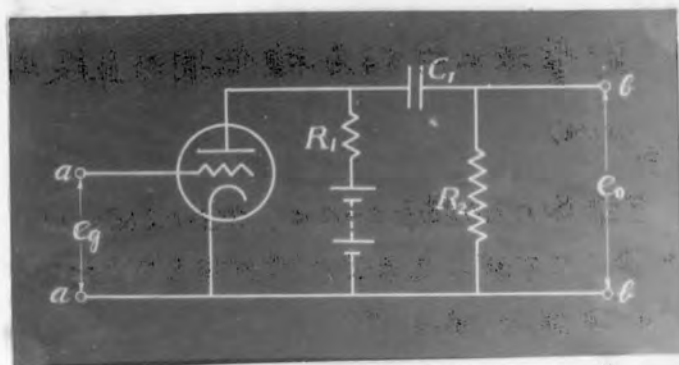
$$= \frac{1 - e^{-pt_1}}{1 - e^{-pt_0}} \quad (0 < t < \infty) \quad (2.4.1)$$

となるのに反して、(2.1.7) の方程式の  $[E_n(p)]$  に対する  $E_n(p)$  とは、 $\omega$  何れ周期目の  $0 < t < t_0$  なる範囲の  $e_n(t)$  に対する  $p$  函数のみを求めれば事足りるのであって、其の一周期間の前後に於ける  $e(t)$  の形状は全然考慮する必要はないのである。即ち  $\omega$  何れ周期目の一周期間のみに着目すれば、 $\omega$  2.4.1 図の場合には所要の  $E_n(p)$  は次式にて與へられる。

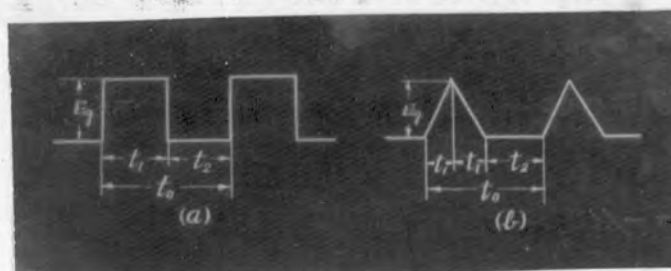
$$E_n(p) = 1 - e^{-pt_1} \quad (0 < t < t_0) \quad (2.4.2)$$

斯くて、(2.4.1) を用ひて得られた (2.1.1) 式の解が序説に述べた如く種々の欠点を包蔵するのに対して、(2.4.2) を用ひて得られた (2.1.2) 式の解は、遷渡或は定常現象の何れを向はず 円函数並びに双曲線函数を有限箇組合せたものと表現せられる筈である。従つて  $[E_n(p)]$ ,  $[S_n(p)]$  は (2.4.2) 式の如き形状を以て表現せられ、決して (2.4.1) 式の如く無限に多くの特異点を有する形式を以て表現する必要はなく、若し基礎微分方程式 (2.1.1) 式が常微分係数線型微分方程式である限り  $[x(t)]$  並びに  $[y(t)]$  は共にその円函数並びに指数函数の有限箇の組合せを以て表現し得られる。従つて所要の解も亦仮令へそれが不連続点を有する場合に在つても遷渡並びに定常現象の何れを向はず常に円函数並びに指数函数の有限箇の組合せを以て表現せらるゝに至るのである。

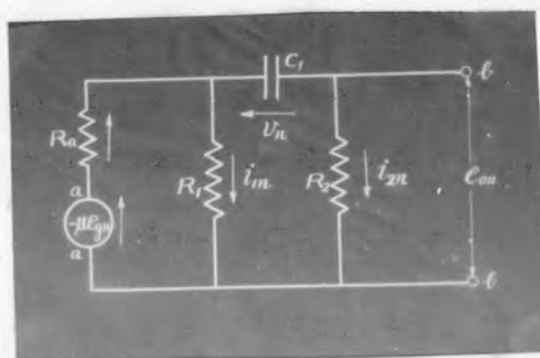
次ぎに我々が屢々使用する處の周期的特殊衝撃波の  $e(t)$ ,  $e_n(t)$  及びその  $p$  函数  $E_n(p)$  を一括表示すれば  $\omega$  2.4.1 表に示すが如くなる。又斯る衝撃波で高周波を交調した場合を  $\omega$  2.4.2 表に示す。



第 3·1·1 图



第 3·1·2 图



第 3·1·3 图

### 第3章 周期的衝撃波に対する各種低周波単段増幅器の増幅特性

#### 3.1. 抵抗結合増幅器<sup>(15), (16)</sup>

第3.1.1図に示すかゝる増幅器の入力端子  $a-a'$  に、第3.1.2図(a)及び(b)のかゝる周期的矩形波及び三角波が入来せる場合の出力波の定常値の諸性質を吟味する。

##### [A] 真空管の内部静電容量を無視せる場合<sup>(16)</sup>

最も簡単な場合として、真空管の内部静電容量を無視せる場合を取り上げ、その等価回路を示せば第3.1.3図のかゝるである。斯る回路に対する矩形波或は三角波の増幅特性の研究は既に C. W. Oateley<sup>(17)</sup> に依って行はれてゐるが同氏の研究が単一孤立波入力に対する出力波形の計算を行つてあるあるので、茲では、入力が周期的なる場合出力波形が単一入力の夫に比して如何様なるに崩れるかを吟味したい。

今電流及び電圧を図示のかゝるに設定すれば、各周期目の電流電圧は次式に依つて與へられる。

$$\left. \begin{aligned} R_a i_{an} + R_1 i_{1n} &= -\mu E_{gn}(t) \\ v_n + R_2 i_{2n} - R_1 i_{1n} &= 0 \\ i_{an} - i_{1n} - C_1 \frac{dv_n}{dt} &= 0 \\ C_1 \frac{dv_n}{dt} &= i_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

上式より、計算を簡単にする爲に、抵抗  $R_a$ ,  $R_1$ , 及び  $\mu R_2$  を流れる電流  $i_{an}$ ,  $i_{1n}$ , 及び  $i_{2n}$  を消去せば、 $v_n$  に対する基礎微分方程式として次式を得る。

$$\left( \frac{R_0^2 C_1}{R_1 + R_a} \frac{d}{dt} + 1 \right) v_n = -\frac{\mu R_1}{R_1 + R_a} E_{gn}(t) \quad (3.1.2)$$

茲に  $R_0^2 = R_1 R_a + R_2 R_a + R_2 R_1$

上に得られた方程式は唯一つで第2章の解析法に出現する行列の次数が1なる特制の場合である。(3.1.2)式より  $v_n$  の  $p$  函数  $V_n$  は次式に依り決定される。

$$\left( \frac{R_0^2 C_1 p}{R_1 + R_a} + 1 \right) V_n = -\frac{\mu R_1}{R_1 + R_a} E_{gn}(p) + p \frac{R_0^2 C_1}{R_1 + R_a} v_{n-1} \Big|_{t=t_0} \quad (3.1.3)$$

然して  $E_{gn}(p)$  は  $E_{gn}(t)$  の  $p$  函数にて、第2.4.1表より

$$\left. \begin{aligned} \text{周期的矩形波に対しては} &: E_{gn}(p) = E_g (1 - e^{-pt_1}) \\ \text{周期的三角波に対しては} &: E_{gn}(p) = E_g (1 - e^{-pt_1})^2 / pt_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

となる。

以下必要な諸計算を各項目に分ち順次施行する事としよう。

(1)  $[F(p)]$ 

この場合は上起せる如く行列の次数は  $1=1$  で (2.1.2) 式と (3.1.3) 式とを比較すれば (2.1.4) 式より直ちに次式を得る。

$$[F(p)] = \left( \frac{R_0^2 C_1 p}{R_1 + R_a} + 1 \right)^{-1} = \frac{R_1 + R_a}{R_0^2 C_1 p + R_1 + R_a} \quad (3.1.5)$$

(2)  $[f(t)]$ 

(2.1.7) 式と (3.1.5) 式より

$$[f(t)] = \int_0^\infty p[F(p)] = \frac{R_1 + R_a}{R_0^2 C_1} E^{-\frac{R_1 + R_a}{R_0^2 C_1} t} \equiv A E^{-At} \quad (3.1.6)$$

$$\text{故に} \quad A = \frac{R_1 + R_a}{R_0^2 C_1}$$

(3.1.7)

(3)  $[x(t)]$ 

(2.1.4) と (2.1.7) 式より\*

$$[x(t)] = [f(t)] \frac{R_0^2 C_1}{R_1 + R_a} = E^{-At} \quad (3.1.8)$$

(4)  $[\varphi(t)]$ 

今の場合は

$$\begin{pmatrix} [E_n(p)] \\ [S_n(p)] \end{pmatrix} = - \frac{\mu R_1}{R_1 + R_a} E_{gn}(p)$$

に於て、上式及び (3.1.4) (3.1.5) を (2.1.7) の第一式に代入すれば

(a) 周期的矩形波に対しては：

$$[\varphi(t)] = \int_0^\infty \frac{-\mu R_1 E_g (1 - E^{-pt_1})}{R_0^2 C_1 p + R_1 + R_a} = \frac{-\mu B E_g}{A R_2 C_1} \{ (1 - E^{-At}) - (1 - E^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) \} \quad (3.1.9)_a$$

(b) 周期的三角波に対しては：

$$\begin{aligned} [\varphi(t)] &= \int_0^\infty \frac{-\mu R_1 E_g (1 - E^{-pt_1})^2}{(R_0^2 C_1 p + R_1 + R_a) p t_1} \\ &= \frac{-\mu B E_g}{A t_1 R_2 C_1} \left[ \left\{ t + \frac{1}{A} (E^{-At} - 1) \right\} - 2 \left\{ (t - t_1) + \frac{1}{A} (E^{-A(t-t_1)} - 1) \right\} H(t-t_1) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (t - 2t_1) + \frac{1}{A} (E^{-A(t-2t_1)} - 1) \right\} H(t-2t_1) \right] \quad (3.1.9)_b \end{aligned}$$

故に

$$B = \frac{R_1 R_2}{R_0^2}$$

(3.1.10)

\* (3.1.2) 式と (2.1.3) 式を比較すれば明かな様に、今の場合は次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} [L][I][O] \\ [O][I][C] \end{pmatrix} = \frac{R_0^2 C_1}{R_1 + R_a}$$



1)  $H(t)$  は所謂単位跳躍函数<sup>\*</sup>にて

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

である。

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix}_{t=t_0} = ([\Pi] - [\chi(t_0)])^{-1} [\varphi(t_0)]$$

今の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix}_{t=t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n-1} \Big|_{t=t_0}$$

なるに依り, (3.1.8) 及び (3.1.9) を (2.3.4) に代入すれば<sup>\*</sup>

(a) 周期的矩形波に対しては

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n-1} \Big|_{t=t_0} = - \frac{\mu B E_g}{A R_2 C_1} \frac{(1 - \varepsilon^{-A t_1}) \varepsilon^{-A t_2}}{(1 - \varepsilon^{-A t_0})} \quad (3.1.11)_a$$

(b) 周期的三角波に対しては

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n-1} \Big|_{t=t_0} = - \frac{\mu B E_g}{A^2 t_1 R_2 C_1} \frac{(1 - \varepsilon^{-A t_1})^2 \varepsilon^{-A t_2}}{(1 - \varepsilon^{-A t_0})} \quad (3.1.11)_b$$

なる値を得る。

以上に予備的計算を終り, 之等の諸結果を (2.3.5) に代入する時は所要の  $v_n$  の定常値  $v$  を計算することが出来る。即ち

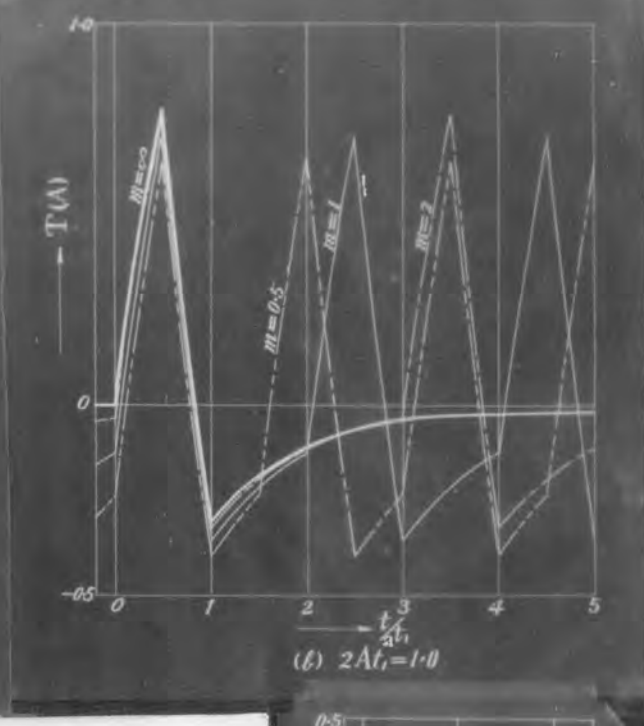
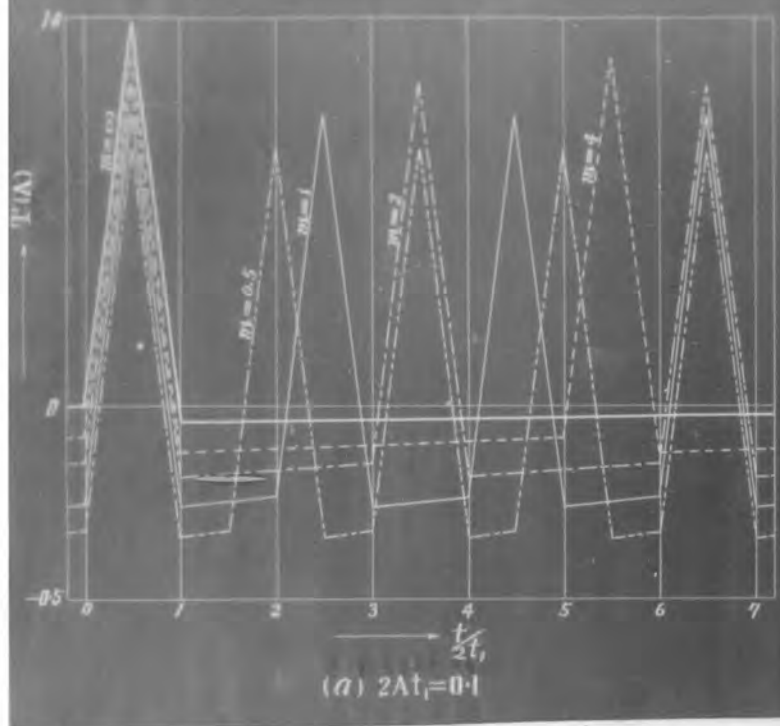
$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \begin{cases} - \frac{\mu B E_g}{A R_2 C_1} \left\{ (1 - \varepsilon^{-A t}) - (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) \right. \\ \quad \left. + \frac{(1 - \varepsilon^{-A t_1}) \varepsilon^{-A t_2}}{(1 - \varepsilon^{-A t_0})} \varepsilon^{-A t} \right\} & \text{(周期的矩形波入力)} \\ - \frac{\mu B E_g}{A^2 t_1 R_2 C_1} \left[ \{ A t + (\varepsilon^{-A t} - 1) \} - 2 \{ A(t-t_1) + (\varepsilon^{-A(t-t_1)} - 1) \} H(t-t_1) \right. \\ \quad \left. + \{ A(t-2t_1) + (\varepsilon^{-A(t-2t_1)} - 1) \} H(t-2t_1) + \frac{(1 - \varepsilon^{-A t_1})^2 \varepsilon^{-A t_2}}{(1 - \varepsilon^{-A t_0})} \varepsilon^{-A t} \right] & \text{(周期的三角波入力)} \end{cases} \quad (3.1.12)$$

然るに希求の値は  $C_1$  の端子電圧  $v$  には非ずして抵抗  $R_2$  に於ける電圧降下  $v_0$  なるを以て, 之を  $v_0$  とす。

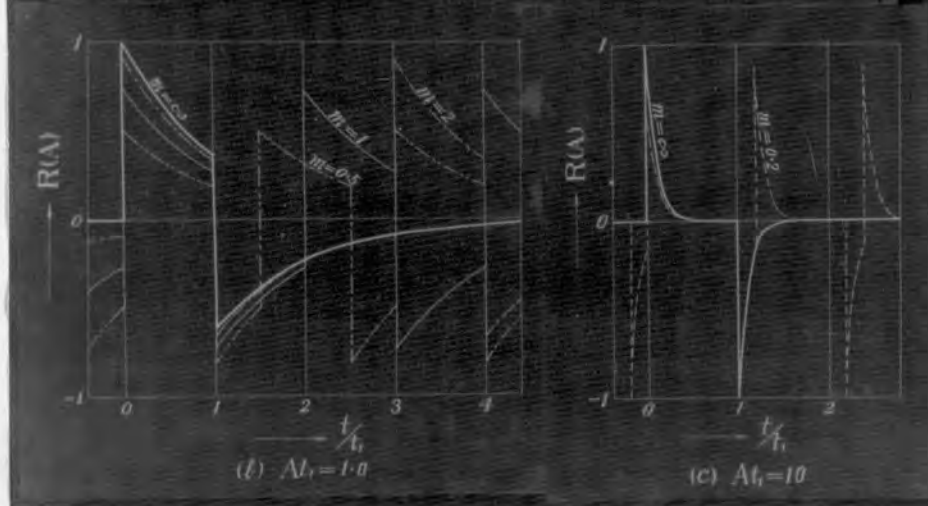
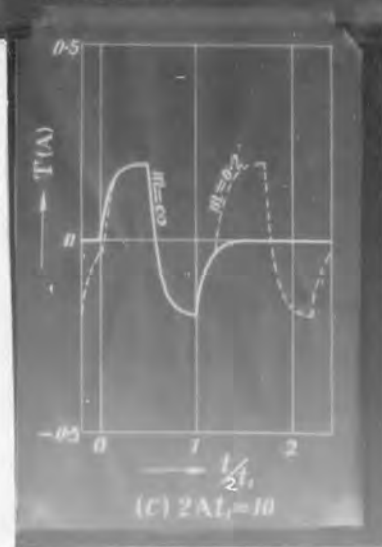
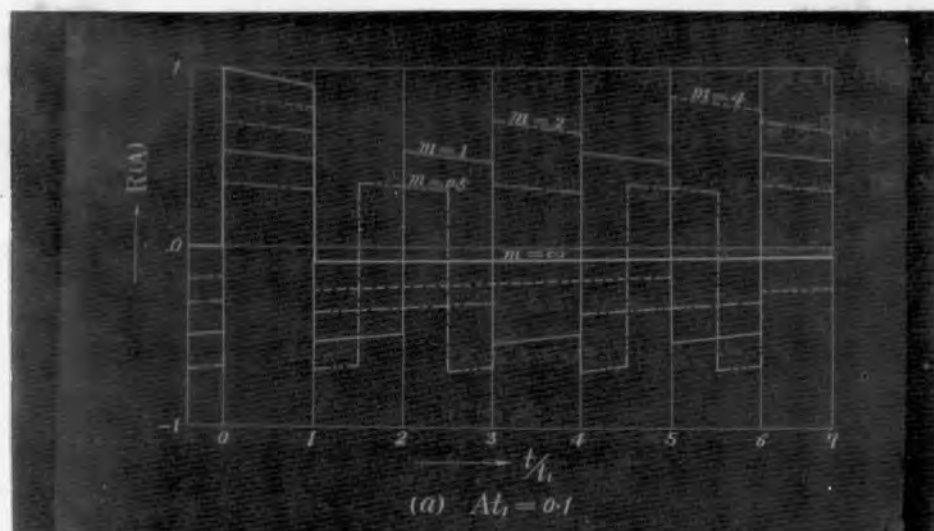
$$v_0 = R_2 C_1 \frac{dv}{dt} \quad (3.1.13)$$

にて表へらる。依つて上式に (3.1.12) を代入すれば<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> 今の場合  $[\chi(t_0)]$  の固有根は (3.1.8) 式より  $\varepsilon^{-A t_0} < 1$  にて且つ  $[\varphi(t_0)]$  非 0 なるを以て (2.3.4) 式が適用出来る。



第 3·1·5 图



第 3·1·4 图

周期的矩形波に対しては

$$e_o = -\mu E_g B R(A) \quad (3.1.14)_a$$

又周期的三角波に対しては

$$e_o = -\mu E_g B T(A) \quad (3.1.14)_b$$

但し

$$A = \frac{R_1 + R_2}{C_1 R_0^2}, \quad B = \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \quad (\text{再出}) \quad (3.1.15)$$

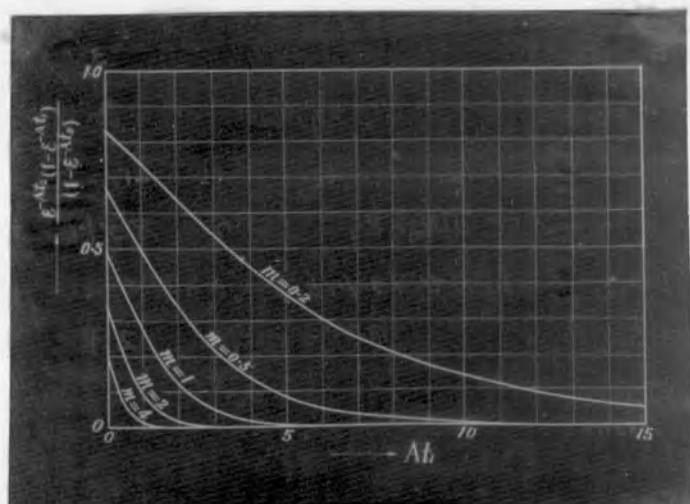
にて、且つ  $R(A)$  及び  $T(A)$  は夫々次の如き函数を意味する。

$$R(A) = e^{-At} - e^{-A(t-t_1)} H(t-t_1) - \frac{(1-e^{-At_1})e^{-At_2}}{(1-e^{-At_0})} e^{-At} \quad (3.1.16)_a$$

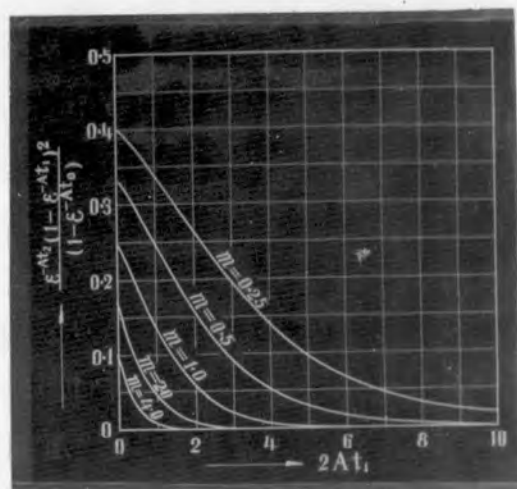
$$T(A) = \frac{1}{At_1} \left\{ (1-e^{-At}) - 2(1-e^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) + (1-e^{-A(t-2t_1)}) H(t-2t_1) \right. \\ \left. - \frac{(1-e^{-At_1})e^{-At_2}}{(1-e^{-At_0})} e^{-At} \right\} \quad (3.1.16)_b$$

然して  $R(A)$  及び  $T(A)$  の右辺の最後の項が信号が周期的に連続なるを導入された項であつて、之れの出カ波に及ぼす影響を見んが爲に両式に数値計算を施行し、その結果を図示すれば夫々第3.1.4図及び第3.1.5図を得る。但し図中のパラメーター  $\mu$  は信号波の休止期間と衝撃波の幅との比、即ち第3.1.4図に在つては  $t_1$  の値を、又第3.1.5図に在つては  $t_1/2t_1$  の値を意味する。従つて  $m=\infty$  なる曲線は勿論単一孤立波入力に対する出カ波形で、周期的信号波に対する出カ波形の相違は一見すれば明かにはく、特に  $At_1$  の値の小さい場合、換言すれば、出カ波の変遷が小さい時は、出力電圧の零電位が単一信号波に対する夫に比して相当負の方にずれる、然も信号の周期に依つてそのずれの大きさは異り零電位が浮動する。然して一般に周期が大きい程その傾向は大である。

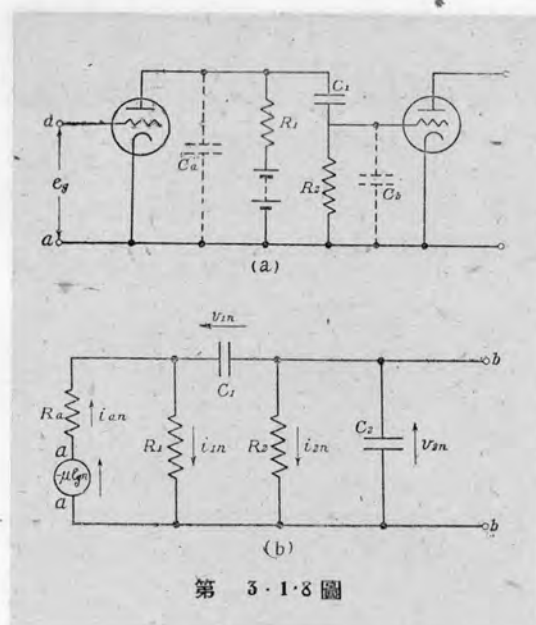
斯る零電位の浮動は出力電圧の正の部分の面積と負の部分の面積とが常に相等しくなる様に行はれるのである。此の事実は定常状態に在つては、結合用の静電容量  $C_1$  の一周期に於ける充放電の量が相等しいことに基因するが、一方数学的にも(3.1.16)<sub>a</sub> 及び(3.1.16)<sub>b</sub> 式を一周期間( $t=0 \sim t_0$ )に亘つて積分せる値が零となることを容易に証明し得るのである。従つて同一の周期、同一の波高及び同一の幅を有する矩形波と三角波とでは、零電位の浮動は前者の方が大なることが分る。然して斯る出カ波が更に次段増幅器に入る場合に在つては、上述の零電位の浮動は、正信号波に対しては、正の格子偏奇電圧を構成するといへり、次段増幅器の格子偏奇電圧



第 3.1.6 圖



第 3.1.7 圖



第 3.1.8 圖

に充分の注意を要する。

之等の特性は前記せる如く信号波が周期的なる為に入力された(3.1.16)<sub>a</sub>及び(3.1.16)<sub>b</sub>式右辺の最後の項の性質に基因するもので、之の項の性質を一層明確ならしめる為(1-ε<sup>-At</sup>)ε<sup>-At</sup>/(1-ε<sup>-At</sup>)<sub>0</sub> 或は (1-ε<sup>-At</sup>)<sup>2</sup>ε<sup>-At</sup>/(1-ε<sup>-At</sup>)<sub>0</sub> の値を縦軸に、横軸には夫々 At 及び 2At の値を取り、上式の R の値をパラメーターとして曲線を描いたのが 3.1.6 図及び 3.1.7 図である。然して之等の縦軸の値は (3.1.16)<sub>a</sub> 及び (3.1.16)<sub>b</sub> 式より明かなる如く R(A) 及び T(A) の t=+0 に於ける値で、At が小なる時は前者は後者の約 2 倍の値を有することが分る。従つて電圧位の浮動も前者が後者の約 2 倍となる訳である。

[B] 真空管電極間の静電容量を考慮せる場合<sup>(15)(16)</sup>

3.1.8 図に於て C<sub>a</sub> を以て陽極陰極間の内部静電容量を、又 C<sub>b</sub> を以て次段真空管の格子陰極間の内部静電容量を表現せしめるものとする。然るに普通使用せられる回路定数に於ては

$$C_a \text{ 或は } C_b \ll C_1; \quad (3.1.17)$$

なる関係が満足される故、3.1.8 図(a)の等価回路は同図(b)に示すが如きものと見做して宜敷からう。但し

$$C_2 = C_a + C_b \quad (3.1.18)$$

今や n 周期目に於ける過渡電流並に電圧を図示の如くに仮定し、キルヒホッフの法則を適用すれば次の諸式を得る。

$$\left. \begin{aligned} R_a i_{an} + v_{1n} + v_{2n} &= -\mu e_{gn}(t) \\ R_2 i_{2n} - v_{2n} &= 0, \\ R_1 i_{1n} - v_{1n} - v_{2n} &= 0, \\ i_{1n} + C_1 \frac{dv_{1n}}{dt} - i_{an} &= 0, \\ i_{2n} + C_2 \frac{dv_{2n}}{dt} - C_1 \frac{dv_{1n}}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.19)$$

簡計算を簡単にする為上式より抵抗素子 R<sub>a</sub> R<sub>1</sub> 及び R<sub>2</sub> を流れる電流 i<sub>an</sub>, i<sub>1n</sub> 及び i<sub>2n</sub> を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{R_a}{R_1} + R_a C_1 \frac{d}{dt}\right) v_{1n} + \left(1 + \frac{R_a}{R_1}\right) v_{2n} &= -\mu e_{gn}(t) \\ C_1 \frac{dv_{1n}}{dt} - \left(\frac{1}{R_2} + C_2 \frac{d}{dt}\right) v_{2n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.20)$$

を得る。更に上式を行列形式を用ひて表現する時は下記の如くになる。

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{R_a}{R_1} + R_a C_1 \frac{d}{dt} & \left(1 + \frac{R_a}{R_1}\right) \\ C_1 \frac{d}{dt} & -\left(\frac{1}{R_2} + C_2 \frac{d}{dt}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu e_{gn}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.21)$$



第 3.1.1 表

$F_{11} = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{R_2} + C_2 p \right)$	$F_{12} = \frac{R'}{A R_1}$
$F_{21} = \frac{C_1 p}{A}$	$F_{22} = -\frac{1}{A} \left( \frac{R'}{R_1} + R_a C_1 p \right)$

茲に

$$A = R_a C_1 C_2 p^2 + \left( \frac{R_0^2}{R_1 R_2} C_1 + \frac{R'}{R_1} C_2 \right) p + \frac{R'}{R_1 R_2}$$

$$R' = R_1 + R_a ; \quad R_0^2 = R_a R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_a$$

第 3.1.2 表

$f_{11} = \frac{1}{R_a C_1} e^{\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta} \left( \alpha + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \sinh \beta t + \cosh \beta t \right\}$
$f_{12} = \frac{R'}{R_a R_1 C_1 C_2 \beta} \sinh \beta t$
$z_{21} = \frac{1}{R_a C_2} e^{\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t + \cosh \beta t \right)$
$f_{22} = -\frac{1}{C_2} e^{\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta} \left( \alpha + \frac{R'}{R_a R_1 C_1} \right) \sinh \beta t + \cosh \beta t \right\}$

茲に

$$\alpha = \frac{-1}{2 R_a R_1} \left( \frac{R_0^2}{R_2 C_2} + \frac{R'}{C_1} \right), \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{R'}{R_a R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

第 3.1.3 表

$z_{11} = e^{\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta} \left( \alpha + \frac{R_0^2}{R_a R_1 R_2 C_2} \right) \sinh \beta t + \cosh \beta t \right\}$
$z_{12} = -\frac{R'}{R_a R_1 C_1 \beta} e^{\alpha t} \sinh \beta t$
$z_{21} = \frac{R'}{R_a R_1 C_2 \beta} e^{\alpha t} \sinh \beta t$
$z_{22} = e^{\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta} \left( \alpha + \frac{R'}{R_a R_1 C_1} \right) \sinh \beta t + \cosh \beta t \right\}$

我々は上式を基礎微分方程式に採用すれば良いのであつて、之を(2.1.2)式と比較する時は次の関係を得る。

$$\begin{pmatrix} [Z(D)] [X] \\ [U] [Y(D)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_0}{R_1} + R_0 C_1 D & 1 + \frac{R_0}{R_1} \\ C_1 D & -(\frac{1}{R_2} + C_2 D) \end{pmatrix} \quad (3.1.22)$$

$$\begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{2n} \end{pmatrix} \quad (3.1.23)$$

$$\begin{pmatrix} [e_n(t)] \\ [\Delta_n(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu E_{gn}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.24)$$

以下第二章の所論に従ひ順を追つて所要の公式の計算を行ふといふ。

#### (1) 行列 $[F(p)]$ の計算

(2.1.4)式に(3.1.22)の関係を代入し  $[F(p)]$  の各要素の値を求める時は表3.1.1表の如くになる。但し同表に於ては(3.1.22)を参照して

$$[F(p)] = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \quad (3.1.25)$$

と置いてある。

#### (2) 行列 $[f(t)]$ の計算

(3.1.25)式及び表3.1.1表の結果を(2.1.7)の式3に代入し、その結果を

$$[f(t)] = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (3.1.26)$$

と置き、 $[f(t)]$  の各要素の計算結果を一括表示すれば表3.1.2表の如くになる。

#### (3) 行列 $[X(t)]$ の計算

(3.1.22)式より今の場合には明かに

$$\begin{pmatrix} [L] [0] \\ [0] [C] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 C_1 & 0 \\ C_1 & -C_2 \end{pmatrix} \quad (3.1.27)$$

なるを以て、(3.1.26)、(3.1.27)並びに表3.1.2表の結果を(2.1.7)の式2に代入する時は所要の  $[X(t)]$  が得られる。今その結果を

$$[X(t)] = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad (3.1.28)$$

と置き、 $[X(t)]$  の各要素の計算結果を表示すれば表3.1.3表を得る。

#### (4) 行列 $[y(t)]$ の計算

今入力を前と同様 周期的矩形波及び三角波とせば、 $E_{gn}(p)$  は(3.1.14)式にて

第 3.1.4 表

$$\varphi_1 = -\frac{\mu E_0 R_1}{R'} \left[ 1 + \varepsilon^{\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta} \left( a + \frac{R'}{R_a R_1 C_1} \right) \sinh \beta t - \cosh \beta t \right\} - \left[ 1 + \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \left\{ \frac{1}{\beta} \left( a + \frac{R'}{R_a R_1 C_1} \right) \times \sinh \beta(t-t_1) - \cosh \beta(t-t_1) \right\} \right] H(t-t_1) \right]$$

$$\varphi_2 = -\frac{\mu E_0}{R_a C_2 \beta} \left\{ \varepsilon^{\alpha t} \sinh \beta t + \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \sinh \beta(t-t_1) \times H(t-t_1) \right\}$$

(a)

第 3.1.4 表

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -\frac{\mu E_0 R_1}{t_1 R'} \left[ t - \frac{C_1 R_0^2}{R'} \left\{ 1 - \varepsilon^{\alpha t} \left( \cosh \beta t - \frac{a + (R'/C_1 R_0^2)}{\beta} \sinh \beta t \right) \right\} - 2(t-t_1) \right. \\ & - \frac{C_1 R_0^2}{R'} \left\{ 1 - \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \cosh \beta(t-t_1) - \frac{a + (R'/C_1 R_0^2)}{\beta} \sinh \beta(t-t_1) \right\} \left. \right] H(t-t_1) \\ & + \left[ (t-2t_1) - \frac{C_1 R_0^2}{R'} \left\{ 1 - \varepsilon^{\alpha(t-2t_1)} \cosh \beta(t-2t_1) - \frac{a + (R'/C_1 R_0^2)}{\beta} \sinh \beta(t-2t_1) \right\} \right] H(t-2t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & -\frac{\mu E_0 R_1 R_2 C_1}{R' t_1} \left[ 1 - \varepsilon^{\alpha t} \left( \cosh \beta t - \frac{a}{\beta} \sinh \beta t \right) - 2 \left[ 1 - \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \left\{ \cosh \beta(t-t_1) - \frac{a}{\beta} \sinh \beta(t-t_1) \right\} \right] H(t-t_1) \right. \\ & + \left[ 1 - \varepsilon^{\alpha(t-2t_1)} \left\{ \cosh \beta(t-2t_1) - \frac{a}{\beta} \sinh \beta(t-2t_1) \right\} \right] H(t-2t_1) \end{aligned}$$

(b)

にて與へらるから、(2.1.7)の第一式に(3.1.25)、(3.1.24)及び(3.1.14)式を代入しオ3.1表に示す結果を利用して計算せられた $[\varphi(t)]$ を

$$[\varphi(t)] = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (3.1.29)$$

と置けば、 $\varphi_1$ 及び $\varphi_2$ はオ3.1.4表の如くになる。但し同表(A)は入力が周期的矩形波なる場合に於て(b)は入力が周期的三角波なる場合である。(オ3.1.2図参照)

(5) 逆行列 $\{[\Pi] - [X(t_0)]\}^{-1}$ の計算

(3.1.28)の關係に着目して逆行列 $\{[\Pi] - [X(t_0)]\}^{-1}$ を計算すれば下記の如くになる。

$$\{[\Pi] - [X(t_0)]\}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 1 - \chi_{22}^0 & \chi_{12}^0 \\ \chi_{21}^0 & 1 - \chi_{11}^0 \end{pmatrix} \quad (3.1.30)$$

$$\text{茲に} \quad D = (1 - \chi_{11}^0)(1 - \chi_{22}^0) - \chi_{12}^0 \chi_{21}^0$$

であり、更にオ3.1.3表の値を代入する時は次式を得る。

$$D = 1 - 2\varepsilon^{\alpha t_0} \cosh \rho t_0 + \varepsilon^{2\alpha t_0} = (1 - \varepsilon^{(\alpha+\beta)t_0})(1 - \varepsilon^{(\alpha-\beta)t_0}) \quad (3.1.31)$$

尚上記表式中 $[X(t)]$ の各元素の右肩に0(+0又は-0と混同せざる様注意を要する。)を付したるは、右肩に0を附せざる表式中の $t$ の値を $t_0$ と置いた場合の値を意味するものとす。以下之に準ずる事とする。

(6) 定常状態に於ける各周期の終末値の計算

(2.3.4)式に(3.1.30)及び(3.1.29)並びにオ3.1.4表及びオ3.1.3表の結果を代入し、定常状態に於ける各周期の終末値を計算する時は次の結果を得る。即ち入力が周期的矩形波の場合に對しては

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix}_{t=t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} v_{1,n-1}^0 \\ v_{2,n-1}^0 \end{pmatrix} = -\frac{\mu E_g}{D} \left\{ \begin{array}{c} \frac{R_1}{R_1'} \left\{ \xi_a + \frac{1}{\beta} \left( \alpha + \frac{R_1'}{R_a R_1 C_1} \right) \eta_a \right\} \\ \frac{\eta_a}{R_a C_1 \beta} \end{array} \right\} \quad (3.1.32)_a$$

茲に

$$\xi_a = \varepsilon^{\alpha t_0} \{ \varepsilon^{\alpha t_0} - \cosh \rho t_0 \} + \varepsilon^{\alpha t_0} \{ \cosh \rho t_2 - \varepsilon^{\alpha t_0} \cosh \rho t_1 \}$$

$$\eta_a = \varepsilon^{\alpha t_0} \sinh \rho t_0 - \varepsilon^{\alpha t_0} \{ \sinh \rho t_2 + \varepsilon^{\alpha t_0} \sinh \rho t_1 \}$$

又入力が周期的三角波の場合に對しては

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} [i_{n-1}] \\ [v_{n-1}] \end{pmatrix}_{t=t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} v_{1,n-1}^0 \\ v_{2,n-1}^0 \end{pmatrix} = -\frac{\mu E_g R_1 C_1}{t_1 R_1' D} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{R_2}{R_1} \left\{ \xi_b + \frac{1}{\beta} \left( \alpha + \frac{R_1'}{C_1 R_2^2} \right) \eta_b \right\} \\ R_2 \left\{ \xi_b + \frac{\alpha}{\beta} \eta_b \right\} \end{array} \right\}$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} \xi_b &= \varepsilon^{\alpha t_0} \{ \varepsilon^{\alpha t_0} - \cosh \beta t_0 \} + 2\varepsilon^{\alpha(t_0-t_1)} \{ \cosh \beta(t_0-t_1) - \varepsilon^{\alpha t_0} \cosh \beta t_1 \} \\ &\quad - \varepsilon^{\alpha t_2} \{ \cosh \beta t_2 - \varepsilon^{\alpha t_0} \cosh 2\beta t_1 \} \\ \eta_b &= \varepsilon^{\alpha t_0} \sinh \beta t_0 - 2\varepsilon^{\alpha(t_0-t_1)} \{ \sinh \beta(t_0-t_1) + \varepsilon^{\alpha t_0} \sinh \beta t_1 \} \\ &\quad + \varepsilon^{\alpha t_2} \{ \sinh \beta t_2 - \varepsilon^{\alpha t_0} \sinh 2\beta t_1 \} \end{aligned} \right\} (3.1.32)_b$$

扱て(1)乃至(7)の計算に依り、此の場合必要は予備的計算が一応完了した筈である。

次ぎに之等の結果を用ひて所要の出力電圧の定常値を求めて見よう。(2.3.5)式に(3.1.23), (3.1.28)及び(3.1.29)を代入する時は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} v_{1,n-1}^0 \\ v_{2,n-1}^0 \end{pmatrix}$$

を得る。従つて出力電圧の定常値  $v_2$  は次式に依つて與へられる。

$$v_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n} = \varphi_2 + \chi_{21} \lim_{n \rightarrow \infty} v_{1,n-1}^0 + \chi_{22} \lim_{n \rightarrow \infty} v_{2,n-1}^0 \quad (3.1.33)$$

上式に於3.1.2表及び3.1.4表並に(3.1.32)<sub>a</sub>及び(3.1.32)<sub>b</sub>の結果を代入すれば、

入力が周期的矩形波なる時は

$$v_2 = -\mu B E_g \{ R(A_1) - R(A_2) \} \quad (3.1.34)_a$$

入力が周期的三角波なる時は

$$v_2 = -\mu B E_g \{ T(A_1) - T(A_2) \} \quad (3.1.34)_b$$

但し

$$B = \frac{1}{2R_a C_a \beta}, \quad A_1 = -(\alpha + \beta), \quad A_2 = -(\alpha - \beta) \quad (3.1.35)$$

にて  $R(a)$  及び  $T(a)$  は (3.1.16)<sub>a</sub> 及び (3.1.16)<sub>b</sub> 式と同じである。

茲に得られた (3.1.34)<sub>a</sub> 及び (3.1.34)<sub>b</sub> 式こそ吾々が希求せんとする出力電圧の定常値であり、何れも有限箇の初等函数の集合として表現せられてゐることを知る。之等の式を夫々 (3.1.16)<sub>a</sub> 及び (3.1.16)<sub>b</sub> 式と比較する時は、此の場合の出力は  $A$  が夫々  $A_1$  及び  $A_2$  なる二つの出力波の差として構成されてゐることを知る。従つて  $A_1$  及び  $A_2$  の値を回路定数より決定する時は於3.1.4図及び於3.1.5図より直接図式的に今の場合の出力波を決定することが出来る。

然るに通常の回路定数に在つては、前記せる如く (3.1.17) の関係ある故、之を参照して於3.1.2表より  $\alpha, \beta$  の近似値を求め、(3.1.35)式に代入すれば

$$B = \frac{R_1 R_2}{R_0^2}, \quad A_1 = \frac{R_1 + R_a}{C_1 R_0^2} \ll A_2 = \frac{R_0^2}{C_2 R_1 R_a} \quad (3.1.35)'$$



然るに上記のB及び $A_1$ は、(3.1.15)のB及び $A$ の値と全く同一であり、電極間の静電容量その他の微小容量 $C_2$ を考慮せる時は(3.1.14) $_a$ 及び(3.1.14) $_b$ にて導かれる出力波に、新たに $\mu B E_g R(A_2)$ (入力が矩形波なる場合)及び $\mu B E_g T(A_2)$ (入力が三角波なる場合)なる出力波を附加すれば良いことが分る。

以下今の場合の無歪増幅の条件を詳しく詳細に吟味しよう。

(イ)  $t_1$ の値が充分大にて $A_2 t_1 \gg 1$ なる場合( $R(A_1)$ 或は $T(A_1)$ なる出力波のみを利用せんとする場合)。

入力が周期的矩形波の場合には、(3.1.14)四より明かならう、入力電圧の不連続時即ち $t=0$ 及び $t=t_1$ の極く近傍を除けば(3.1.34) $_a$ 式に於いて $R(A_2)$ なる出力波は $R(A_1)$ なる出力波に対して無視することが出来るから、此の場合の出力は、入力の不連続時を除けば大略次式にて算定せられる。

$$v_2 \cong -\mu B E_g R(A_1) \quad (3.1.34)_a'$$

一方入力電圧が周期的三角波なる場合には(3.1.15)四より明かならう、 $A_2 t_1$ が充分大なる程 $T(A_2)$ なる出力の波高は低くなり全体の波形に及ぼす影響は小となる。従つて此の場合に在つても、同様出力電圧は

$$v_2 \cong -\mu B E_g T(A_1) \quad (3.1.34)_b'$$

にて導かれる。

従つて入力の如何を問はず $A_1 t_1$ の値が充分大ならば変遷の無い出力波を得る。

(ロ)  $t_0$ の値が充分小にて $A_2 t_0 < 1$  (従つて当然 $A_1 t_1 < 1$ )なる場合( $R(A_1)$ 及び $R(A_2)$ 或は $T(A_1)$ 及び $T(A_2)$ の兩者を利用せんとする場合)。

此の場合には $A_1 \ll A_2$ なるを以て、 $0 < t < t_0$ なる範囲の凡ての $t$ の値に対して

$$e^{-A_1 t} \cong 1, \quad 1 - e^{-A_2 t} \cong A_2 t$$

と見做す事が出来るから、周期的矩形波の場合には(3.1.34) $_a$ 式より

$$v_2 \cong -\mu B E_g \left[ \left\{ 1 - H(t - t_1) - \frac{t}{t_0} \right\} - R(A_2) \right] \quad (3.1.34)_a''$$

を得る。或は(3.1.16) $_a$ 式を代入すれば

$$v_2 \cong -\mu B E_g \left[ (1 - e^{-A_2 t}) - (1 - e^{-A_2(t-t_1)}) H(t - t_1) - \left\{ \frac{t}{t_0} - \frac{(1 - e^{-A_2 t_1}) e^{-A_2 t_1}}{(1 - e^{-A_2 t_0})} e^{-A_2 t_0} \right\} \right] \quad (3.1.34)_a'''$$

となる。上式の表す波形は $A_2 t_1$ の値に依つて異なり、即ち $A_2 t_1$ が小なる程三角波に近づき、然もその波高は低くなる為無歪増幅の条件から完全に外れる。

然して  $A_2 t_1$  が大きくなるに従ってその波形は矩形波に近づくが、凡そ  $A_2 t_1 > 10$  でなければ、満足な無歪出力波は期待し得ず、結局無歪増幅の可能な場合は (1) の場合に外ならない。

一方入力が周期的三角波の場合には (3.1.34) の式より上と同様に

$$v_2 \cong -\mu B E_g \left[ \frac{1}{t_1} \{ t - 2(t-t_1)H(t-t_1) + (t-2t_1)H(t-2t_1) - \frac{t^2}{2} \} - T(A_2) \right] \quad (3.1.34)''$$

を得る。然るに上式右辺の  $\frac{1}{t_1} \{ \dots \}$  なる項は、波高が 1 なる変歪の全く無い三角波を表す。依って所要の出力の変歪の程度は  $T(A_2)$  に依って左右される。従って第 3.1.5 図より明かになる如く  $A_2 t_1$  が充分に大で  $T(A_2)$  が三角波に近づけば、変歪の小さな出力が得られるためせに観せられるが、(3.1.34)'' と (3.1.16) の式より此の場合には

$$v_2 \cong -\mu B E_g \left[ \frac{A_2}{2t_1} \{ t^2 - 2(t-t_1)H(t-t_1) + (t-2t_1)^2 H(t-2t_1) - \frac{t^2}{2} (2t_1+t_2) \} \right] \quad (3.1.34)'''$$

となり、原波を再現し得ないのみならず、出力の大きさも極めて小となり増幅の目的にも適合し得ない。然して  $A_2 t_1$  が大になると  $T(A_2)$  の歪も大となる為  $T(A_2)$  の波高が  $\frac{1}{t_1} \{ \dots \}$  なる無歪出力に比して無視し得る程度に  $A_2 t_1$  が大きくならなければ、到底満足な無歪出力波は得られず、結局入力三角波の時にも、今の場合には無歪増幅は望めない。

以上の所論を総合すれば、使用目的に依って一律には即断し難いが、無歪増幅の条件は凡そ次の如くである。

$$i) A_1 T < 0.1 \quad ii) A_2 T > 10 \quad (3.1.36)$$

但し  $T$  は衝撃波の幅で、矩形波の場合には  $T=t_1$ 、三角形の場合には  $T=2t_1$  である。然してその出力は

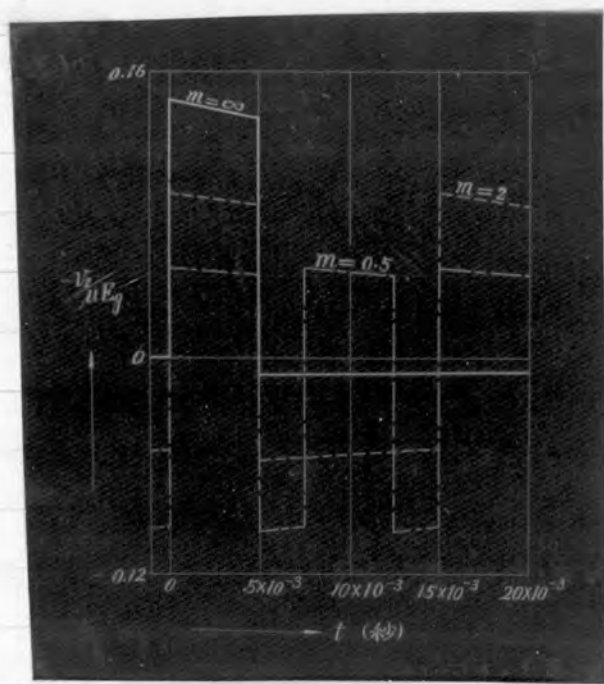
$$\left. \begin{array}{l} \text{矩形波入力の場合: } v_2 \cong -\mu B E_g R(A_1) \\ \text{三角波入力の場合: } v_2 \cong -\mu B E_g T(A_1) \end{array} \right\} \quad (3.1.38)$$

にて與へられ、 $G$  を無視する時の出力波と同じである。

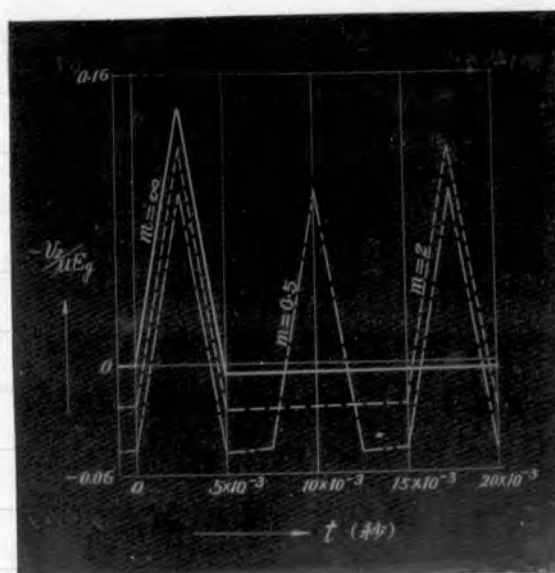
又て (3.1.36) の関係を満足せしめる為には (3.1.35)' より

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_1}{C_2} \frac{R_0^4}{(R_1 R_2) R_1 R_2 R_0} > 100 \quad (3.1.37)$$

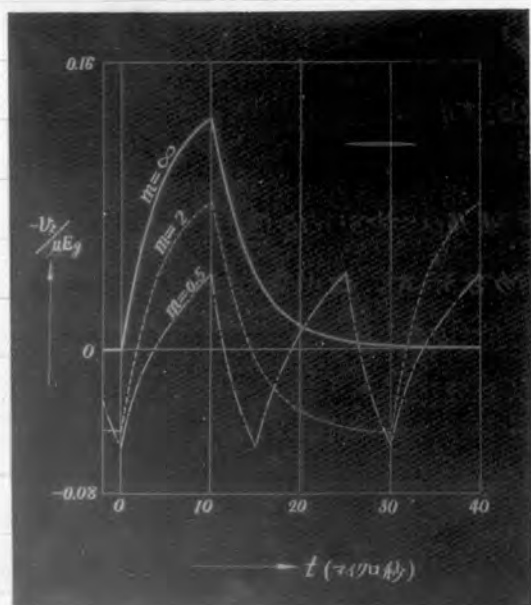
なることを要する。今若し  $R_1 \ll R_2$ ,  $R_1 \ll R_0$  ならば (3.1.35)' 及び (3.1.37) は



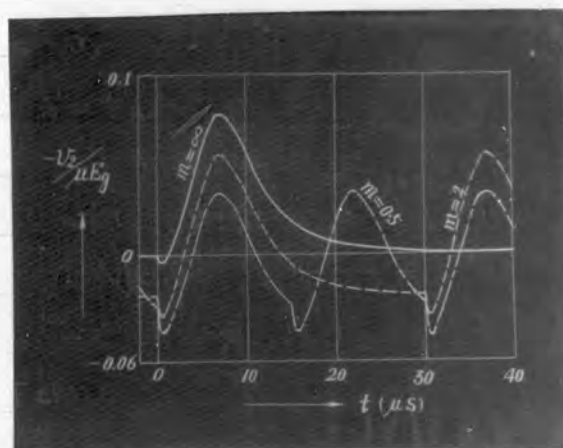
第3.1.9图



第3.1.10图



第3.1.11图



第3.1.12图

$$B = R_1/R_2, \quad A_1 = \frac{1}{C_1 R_2}, \quad A_2 = \frac{1}{C_2 R_1} \quad (3.1.35)''$$

$$A_2/A_1 = \frac{C_1 R_2}{C_2 R_1} > 100 \quad (3.1.37)'$$

となる。

扱て衝撃波の幅 $T$ が極端に大でなければ、 $C_1 R_2$ を適当に選ぶことによつて容易に(3.1.36)の条件を満足せしめることができる。然し $T$ が極めて小なる時は、(3.1.36) ii)の条件が満たされ難くなる。何故なら $C_2$ は或る程度以上小とはなし得ず、又 $R_2$ を小にすれば、 $B$ 従つて増幅度が減じ、之亦限度がある為、 $A_2$ には自ら最大限度がある。従つてこの $A_2$ の最大値を $A_{2max}$ とすれば

$$T_0 = 10/A_{2max} \quad (3.1.39)$$

より鋭い衝撃波を無き増幅することは不可能である。

尚 この $T_0$ を(3.1.39)式にて與へられる値より一層小とする方法が考へられてゐるか。此れに關しては次節に簡単な考察を行ったが、より詳細に就いては次篇 4.6を参照され度い。

扱て以上の模様を一層明確ならしめんが爲實際的數値例)に依つて、二三の出力波形を描いて見よう。

回路定數を

$$R_0 = 10^6 \Omega, \quad R_1 = 2.5 \times 10^5 \Omega, \quad R_2 = 5 \times 10^5 \Omega, \quad C_1 = 0.1 \mu F, \quad C_2 = 30 \mu F$$

と假定すれば、

$$A_1 = 1.43 \times 10^4, \quad A_2 = 2.33 \times 10^5$$

を得る。今衝撃波の幅を $T = 5 \times 10^{-3}$ 秒と假定すれば、

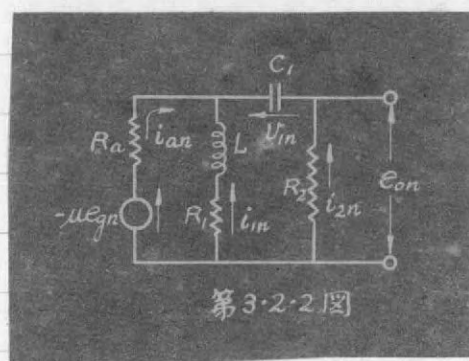
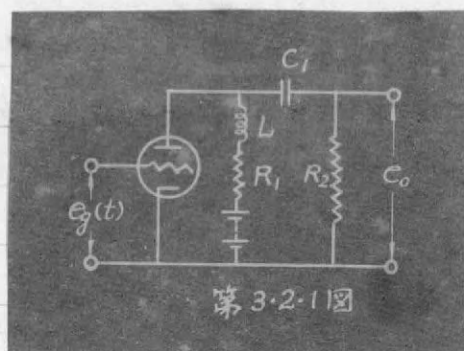
$$A_1 T = 0.0715, \quad A_2 T = 1.17 \times 10^3$$

となり(3.1.36)無き条件を満足する。オ3.1.9圖及びオ3.1.10圖は夫々入力波が周期的矩形波及び三角波なる時の出力波形を示す。之れをオ3.1.4圖及びオ3.1.5圖と比較する時は、今の場合の出力が、近似的に(3.1.38)式で與へられることが明かであらう。次ぎに $T = 10^{-5}$ 秒と假定すれば

$$A_1 T = 1.43 \times 10^{-4}, \quad A_2 T = 2.33$$

となり(3.1.36) ii)の条件が満足されてゐない。参考まで"に今の出力波形を圖示すれば、オ3.1.11圖及びオ3.1.12圖の如くて、 $A_2 T$ が"過小なる為、前者は入力が矩形波なるも、出力は三角波に近く、後者は入力が三角波なるも之亦相当の変態が認められる。







### 3.2 4ヨーク結合増幅器<sup>(16)</sup>

本節では図3.2.1図に示す如き所謂4ヨーク結合増幅器に依つて図3.1.2図(a)に示す周期的矩形波を増幅せんとする場合の定常出力に就いて論じよう。

先づ真空管電極間の静電容量を無視せる簡単な場合から考察する。

[A] 真空管電極間の静電容量を無視せる場合

4ヨークの片抵抗分を含めた陽極回路の抵抗分を $R_1$ とし該回路の昇価回路を挿入せば図3.2.2図を得る。より周波数の電流電圧を図示の如くに仮定し之にキルヒホッフの法則を適用する時は

$$\left. \begin{aligned} -R_a i_{an} + (L \frac{d}{dt} + R_1) i_{in} &= \mu E_g(t), \\ (L \frac{d}{dt} + R_1) i_{in} - R_2 i_{2n} + v_{in} &= 0, \\ i_{an} + i_{in} - C_1 \frac{dv_{in}}{dt} &= 0, \\ C_1 \frac{dv_{in}}{dt} + i_{2n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

となる。計算を簡単にする為には上式より抵抗素 $R_a$ 及び $R_2$ を流れる電流 $i_{an}$ 及び $i_{2n}$ を消去して得られた微分方程式を行列形式を用ひて表現すれば

$$\begin{pmatrix} L \frac{d}{dt} + R_a + R_1 & -R_a C_1 \frac{d}{dt} \\ L \frac{d}{dt} + R_1 & R_a C_1 \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{in} \\ v_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu E_g(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

を得る。上式を基礎微分方程式に採用し、前節の(3.1.21)より以下と全く同様の手算順序を踏襲することによって次の結果を得る。

即ち出力電圧の定常値を $e_0$ とすれば

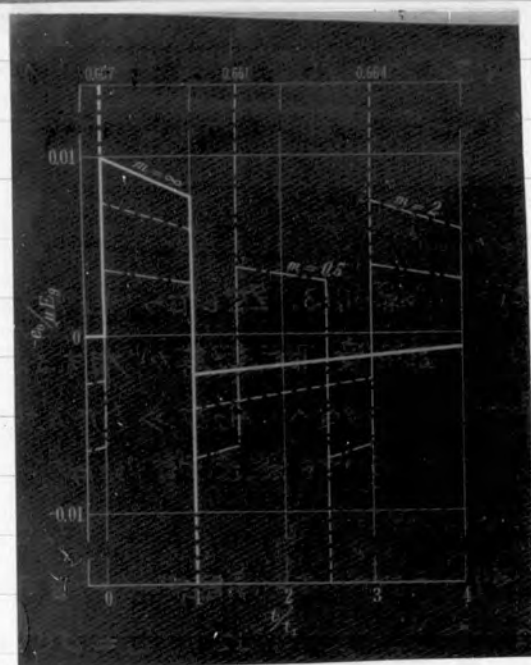
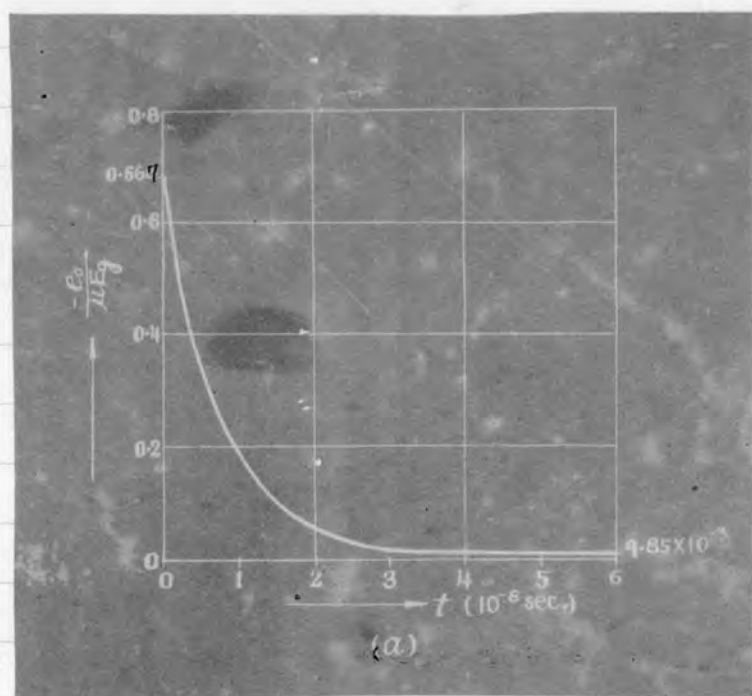
$$e_0 = R_2 C_1 \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{dv_{in}}{dt} = -\mu E_g [B_1 R(A_1) + B_2 R(A_2)] \quad (3.2.3)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -(\alpha + \beta), & A_2 &= -(\alpha - \beta) \\ B_1 &= \frac{R_2 (\frac{R_1}{L} + \beta + \alpha)}{2(R_2 + R_a)\beta}, & B_2 &= \frac{R_2 (-\frac{R_1}{L} + \beta - \alpha)}{2(R_2 + R_a)\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

$$\alpha = -\left( \frac{R_0^2}{2L(R_2 + R_a)} + \frac{1}{2C_1(R_2 + R_a)} \right), \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{R_1 + R_a}{LC_1(R_2 + R_a)}} \quad (3.2.5)$$

にて、 $R(A)$ は(3.1.16)aに與へられる。今の場合の出力は(3.1.14)a式に於て $B=B_1$ ,  $A=A_1$ と考へた時の出力と、 $B=B_2$ ,  $A=A_2$ と考へた時の出力との和と



第 3-2-3 图

にて與へられる事を知る。従つて  $A_1, A_2$  及び  $B_1, B_2$  の値を、與へられた回路定數より決定すれば、オ3-1-4圖より、直ちに今の場合の出力波形を知る事が出来る。

然るに通常使用される回路定數に於ては、 $C_1 R_0^2 \gg L$  なる故、(3-2-5)式と(3-2-4)式より

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{R_1 + R_a}{C_1 R_0^2 + L} \cong \frac{R_1 + R_a}{C_1 R_0^2} \ll A_2 = \frac{L + C_1 R_0^2}{L C_1 (R_2 + R_a)} \cong \frac{R_0^2}{L (R_2 + R_a)} \\ B_1 &= \frac{C_1 R_a (C_1 R_1 R_0^2 - L R_a)}{(L + C_1 R_0^2)^2} \cong \frac{R_a (C_1 R_1 R_0^2 - L R_a)}{C_1 (R_0^2)^2} \ll B_2 = \frac{R_2 (C_1 R_a R_0 + L)}{(L + C_1 R_0^2) (R_2 + R_a)} \cong \frac{R_2^2 R_a}{R_0^2 (R_2 + R_a)} \end{aligned} \quad (3-2-4)'$$

を得る。 $A_1$  は前節(3-1-15)の  $A$  の値に等しく、 $B_1$  は  $L R_a \ll C_1 R_1 R_0^2$  なる時は(前)  $B_1 = \frac{R_1 R_a}{R_0^2}$  となり(3-1-15)の  $B$  に等しくなる。

以下前節と同様無歪増幅の條件を吟味しよう。然るに(3-2-4)'式に依れば  $B_1 \ll B_2$  なるを以て、出力  $e_o$  は近似的に

$$e_o \cong -\mu B_2 R (A_2) \quad (3-2-3)'$$

にて與へられる。従つてオ3-1-4圖より明かな如く  $A_2 \ll 1$  なるは、出力波形は入力電圧の微分波形に近づく。茲本回路が時として微分回路に用いられる所以である。之に及て

$$A_2 \ll 0.1 \quad (3-2-6)$$

なる時は充分歪の少ない出力が得られる。然し乍ら  $A_2$  が特に大なる時は、(3-2-3)'にて與へられる出力は、コイル、真空管、配線等が有する微少な静電容量の為に振動的になり易く、斯る場合には、仮令  $A_2 \gg 1$  なる場合でも微分回路として使用出来ない、又一方  $A_2 \ll 0.1$  であつても無歪増幅は不可能である。之に關しては後述する。

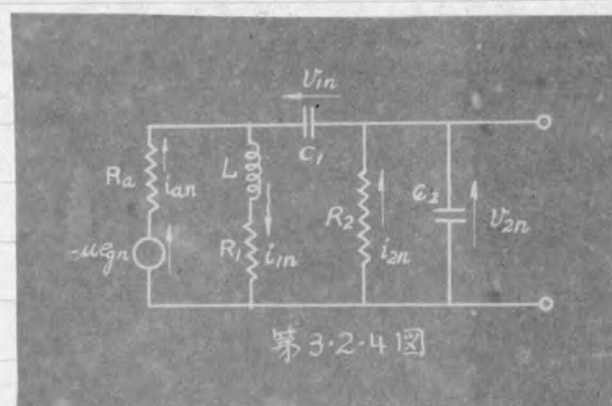
次ぎに二三の數値例を示さう。先が高周波トークを用いた例として回路定數を  $R_a = 10^5 \Omega$ ,  $R_1 = 10^3 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \times 10^5 \Omega$ ,  $L = 0.5 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 0.1 \mu\text{F}$  と仮定する。然る時は

$$\begin{aligned} A_1 &= 4.98 \times 10^{-4} \ll A_2 = 1.35 \times 10^{-5} \\ B_1 &= 9.85 \times 10^{-3} \ll B_2 = 6.67 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

となる。従つて  $t_1 = 5 \times 10^{-3}$  秒とすれば

$$A_1 t_1 = 2.50 \times 10^{-1} \quad A_2 t_1 = 6.77 \times 10^{-5}$$

となり、出力はオ3-2-3圖の如くである。但し同圖(a)は  $t=0$  の直後の出力波形を



示すもので、縦軸中の $E_0$ としては単一孤立波入力に対する出力電圧の値を採用してゐる。同図(8)は波形の全容兒を示すもので、 $t=0$ 及び $t=t_1$ の近傍を除けば $R(A_1) \equiv 0$ となり出力は $-\mu B_1 E_0 R(A_1)$ にて表へられる事を示す。然し $B_1 \ll B_2$ なる為その値は極めて小で増幅の目的には適つてゐない。のみならず全体の波形は寧ろ $t=0$ 及び $t=t_1$ に於て鋭いイムパルスを生じ、微分波形になつてゐることに注意を要する。然し此のイムパルス $(-\mu B_2 E_0 R(A_2))$ の表す出力は、今の $A_2$ が過大にて、僅少な静電容量の為に崩れて振動的となる事は、本節[B]の數値例を見れば明かとならう。

次ぎに低周波4ヨー7結合の例として、各回路常數は上と等しく、單に $L$ の値のみを $L=30\text{H}$ と固定する。又る時は

$$\begin{aligned} A_1 &= 5.01 \times 10 & A_2 &= 2.24 \times 10^3 \\ B_1 &= -5.11 \times 10^{-3} & B_2 &= 6.70 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

とせば、今の場合には $B_1$ が“負で”、 $-\mu B_1 E_0 R(A_1)$ なる出力波の極小性か、先の例題と異つてゐるが、その他の特性は全く同一で改めて説明する筈もないであらう。

### [B] 真空管電極間その他の静電容量を考慮せる場合

[A]に於ては、簡單の爲に無視せる真空管電極間の静電容量並びに4ヨー及び相互線等の有する静電容量の出力に及ぼす影響を考察することしよう。此の場合の等価回路は、亦3.1.8図(a)の回路に対して同図(4)の等価回路を得たと同様の考察に依り、亦3.2.4図を得る。今 $\pi$ 周期中に於ける電流並びに電圧を図示の如くに仮定し、之れにキルヒホッフの法則を適用し、得られた方程式より抵抗素子 $R_a$ 及び $R_2$ を流れる電流 $i_{an}$ 及び $i_{2n}$ を消去し、且つ之れを行列式を用いて表現する時は下記の如くにする。

$$\begin{pmatrix} L \frac{d}{dt} + R_1 & -1 & -1 \\ R_a & R_a C \frac{d}{dt} + 1 & 1 \\ 0 & -R_2 C \frac{d}{dt} & R_2 C \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{1n} \\ v_{1n} \\ v_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu e_n(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

上式が所要の基礎微分方程式にて(2.1.2)式に対応するものである。今の場合は行列の次數が3次なる事が“前の場合と異つてゐるが”(3.1.3)式以下の計算順序を踏襲する事に依り次の結果を得る。



即ち入力が周期的矩形波(図3.1.2図(a))なる時の定常出力は

$$V_2 = -\mu B E_g R(A) - \frac{\mu E_g}{L R_a C_2 A_1 A_2} \left[ \left\{ \frac{\omega^3 L}{\delta^2 + \omega^2} - \frac{\delta R_1}{\omega} \right\} \{ E^{-\delta t} \sin \omega t \right. \\ \left. - E^{-\delta(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1) H(t-t_1) \} - R_1 \{ E^{-\delta t} \cos \omega t - E^{-\delta(t-t_1)} \cos \omega(t-t_1) H(t-t_1) \} \right] \quad (3.2.8)$$

にて表へらる。但し  $R(A)$  は (3.1.16) a 式にて表へられ

$$B = \frac{(R_1 - L A)}{L R_a C_2 A_1 A_2} \quad A_1, A_2 \left\{ = \delta \pm j \omega \right. \quad (3.2.9)$$

にて  $-A_1, -A_2$ , 及び  $A$  は夫々

$$\Delta(p) = L R_a R_2 C_2 p^3 + (R_a L C_1 + R_2 L C_1 + R_2 L C_2 + R_a R_1 R_2 C_1 C_2) p^2 \\ + (L + C_1 R_0^2) p + (R_1 + R_a) \\ R_0^2 = R_a R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_a \quad (3.2.10)$$

の三根にて,  $-A$  は実根,  $-A_1$  及び  $-A_2$  は共扼複素根を意味する。然るに通常の回路に於ては,  $C_1 \gg C_2$ ,  $C_1 R_0^2 \gg L$  にて,  $\delta \gg A$  なる条件が存在する故根と係数の関係より  $A, A_1, A_2$  の近似値を求めれば下記の如くなる。

$$A = \frac{R_1 + R_a}{L + C_1 R_0^2} \cong \frac{R_1 + R_a}{C_1 R_0^2} \ll \delta = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_2} + \frac{R_1}{L} \right\} \\ \omega = \sqrt{\frac{L + C_1 R_0^2}{L R_a R_2 C_2} - \delta^2} \cong \sqrt{\frac{R_0^2}{L C_2 R_a R_2} - \delta^2} \quad (3.2.11)$$

従つて (3.2.8) 式の誘算に際しては,  $\delta$  に対して  $A$  を無視し且つ

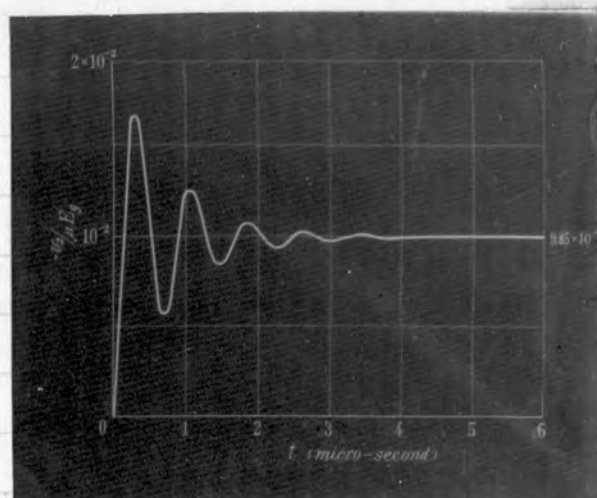
$$E^{-\delta t_1} \ll E^{-A t_1}, \quad E^{-\delta t_2} \ll E^{-A t_2}$$

と仮定してゐる。(3.2.11) 式の値を (3.2.9) 式に代入すれば

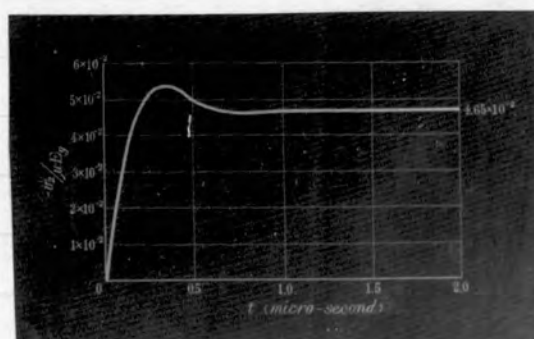
$$B = \frac{C_1 R_2 (C_1 R_1 R_0^2 - L R_a)}{(L + C_1 R_0^2)^2} \cong \frac{R_2 (C_1 R_1 R_0^2 - L R_a)}{C_1 (R_0^2)^2} \quad (3.2.12)$$

となる。(3.2.11) 及び (3.2.12) の  $A$  及び  $B$  は夫々 (3.2.4) 式の  $A_1$  及び  $B_1$  と全く同じ値である。即ち  $C_2$  を考慮せぬ場合の出力 (3.2.3) 式中の  $-\mu B_1 E_g R(A_1)$  なる出力波は  $C_2$  を考慮しても殆んど影響を受けなかつた,  $-\mu B_2 E_g R(A_2)$  なる出力波は, (3.2.8) 式右辺が2項以下の減衰の強い振動性の出力に変化することが分る。

次ぎに上述の  $C_2$  の影響を数値例に就いて吟味しよう。比較対照の便宜上, 回路定数を [A] のオーの数値例と同じく



第 3.2.5 図



第 3.2.6 図

$R_a = 10^5 \Omega$ ,  $R_1 = 10^3 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \times 10^3 \Omega$ ,  $L = 0.5 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 0.1 \mu\text{F}$ .  
とし、加ふるに  $C_2$  と

$$C_2 = 30 \mu\mu\text{F}.$$

とせば\*

$$A = 49.7, \quad \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = (1.25 \pm j 8.13) \times 10^6$$

となる。上記の  $A$  の値は  $[A]$  の 49.8 なる値と良く一致してゐることはおぼしき如くである。  
(3.2.8) 式の出力の  $t=0$  の近傍に於ける波形を圖示すれば、オ3.2.5 圖の如く 1 となる。

但し同圖の縦軸に取った  $v_2$  は  $-\mu B E_g R(A)$  中の

$$-\mu B E_g \frac{(1 - \epsilon^{At_1}) \epsilon^{-At_2}}{1 - \epsilon^{-At_1}} \epsilon^{-At_2}$$

なる項を省略してあるから、同圖は結局単一孤立波入力に対する出力と考へることが出来る。

従つてオ3.2.3 圖(a)とオ3.2.5 圖との波形の相違は、全く  $C_2$  の影響に依るもので

(3.2.3) 式の  $-\mu B_2 E_g R(A_2)$  が崩れてオ3.2.5 圖の  $t=0$  の近傍の振動部分に変わ

ることに気が付く。斯る振動はオ3.2.4 圖の  $C_2 - C_1 - L - R_1$  なる回路に発生する

もので、オ3.2.5 圖の振動性出力が相当強勢で且つ  $-\mu B E_g R(A)$  なる出力の極めて

小なる事は、該回路の抵抗分  $R_1$  が小なることに基因ある。従つて  $R_1$  を大に

する事は振動性出力を抑圧する莫のみならず、 $-\mu B E_g R(A)$  なる出力を大ならしめる\*

上からも極めて有効な手段である。然し  $L$  に比して  $R_1$  を大ならしめた増幅器

は、最早本質的にはフーケ結合増幅器ではなく、抵抗結合増幅器であつて

$C_2$  に依る高周波特性の劣化を  $L$  に依つて補償したものである。然し(3.2.8)

式誘導の仮定より明かなる如く本節の解析結果をその儘適用することが出

来る。之れが詳細はオII編 4.6 に譲ることとし、茲には一つの電圧直例

を掲げて置く。今上記の數値例に於て  $R_1 = 5 \times 10^3 \Omega$  とせば

$$A = 48.8, \quad \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = (5.25 \pm j 6.65) \times 10^6$$

となりオ3.2.5 圖に対応してオ3.2.6 圖を得る。即ち  $A$  の値は前者に比して

約4倍となり、振動性出力の減衰が増し波形が著しく改善されるのみならず

かつ  $-\mu B R(A)$  なる出力も約4.7倍に増大してゐることが分る。

以上を綜合すれば、 $t=0$  の近傍に於ける出力が振動性となる場合の無差増幅の條件は

$$\delta t > 10, \quad A t < 0.1$$

(3.2.13)

にて與へらることは明かであらう。

\*  $R_1 \ll R_2, R_a$  なる時は(3.2.12)式は  $B \cong R_1/R_a$  となり  $R_1$  に比例して  $B$  が増加する。

第3.3.1表

名称	回路図	等価回路	周期的 入力	出力電圧算定公式	備考	無条件 (Tは角周波 の幅)
抵抗結合増幅器			矩形波 ※3.1.2図(a)	$-\mu B E_g R(A)$	$R_0^2 = R_a R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_a$	$A, T > 10$
			三角波 ※3.1.2図(b)	$-\mu B E_g T(A)$	$B = \frac{R_1 R_2}{R_0^2}$	$AT < 0.1$
			矩形波 ※3.1.2図(a)	$-\mu B E_g \{R(A) - R(A_1)\}$	$A = \frac{R_1 + R_2}{C_1 R_0^2}$	$A_1 = \frac{R_0^2}{C_2 R_1 R_2 R_a} \gg A$
			三角波 ※3.1.2図(b)	$-\mu B E_g \{R(A) - T(A_1)\}$	$B_2 = \frac{R_2 R_a}{R_0^2 (R_2 + R_a)} \gg B$	$A_2 T < 0.1$
LC結合増幅器			矩形波 ※3.1.2図(a)	$-\mu E_g \{B R(A) + B_2 R(A_2)\}$	$A_2 = \frac{R_0^2}{L (R_2 + R_a)} \gg A$	$\delta T > 10$
			矩形波 ※3.1.2図(a)	$-\mu E_g R(A) - \frac{\mu E_g R_2}{R_0^2} \left\{ \left[ \frac{\omega^2 L}{\delta^2 + \omega^2} - \frac{\delta R_1}{\omega} \right] \right.$ $\times \left\{ e^{-\delta t} \sin \omega t - e^{-\delta(t-t_1)} \sin \omega(t-t_1) H(t-t_1) \right.$ $\left. \left. - R_1 \left\{ e^{-\delta t} \cos \omega t - e^{-\delta(t-t_1)} \cos \omega(t-t_1) H(t-t_1) \right\} \right\} \right\}$	$\omega = \sqrt{\frac{R_0^2}{L C_2 R_1 R_a} - \delta^2}$	$AT < 0.1$

註,  $R(A) = e^{-At} - e^{-A(t-t_1)} H(t-t_1) - \frac{(1 - e^{-At_1}) e^{-At_2}}{1 - e^{-At_0}} e^{-At}$  (※3.1.4図参照)

$T(A) = \frac{1}{A t_1} \left\{ (1 - e^{-At}) - 2(1 - e^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) + (1 - e^{-A(t-2t_1)}) H(t-2t_1) - \frac{(1 - e^{-At_1})^2 e^{-At_2}}{1 - e^{-At_0}} e^{-At} \right\}$  (※3.1.5図参照)

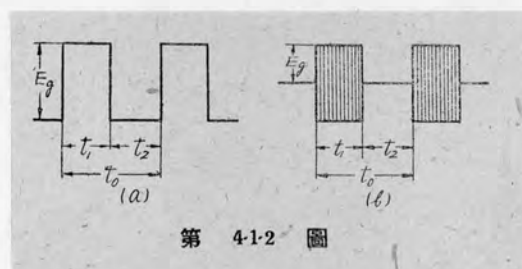
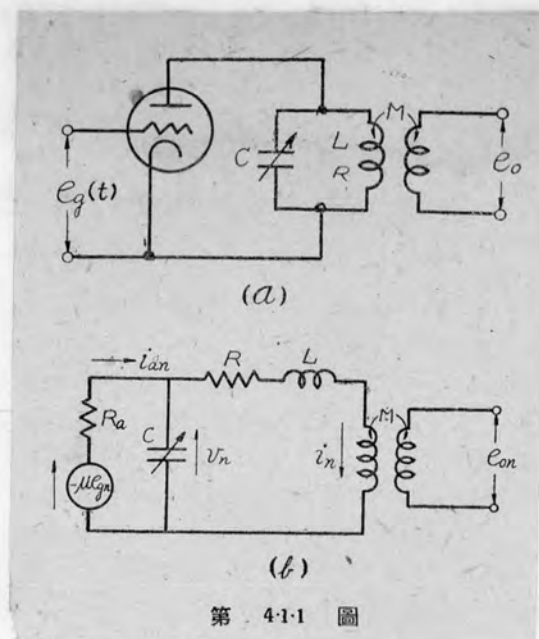


### 3.3 オ3章の綜括

以上 抵抗結合並びに4コーク結合増幅器にて、周期的三角波並びに矩形波を増幅せる場合の出力を算定し、無負増幅の條件を考察したが、~~本節~~之等の諸結果を一括表示し、実用の便に供したものがオ3.3.1表である。

尚本章で取扱った増幅器はすべて単段増幅器であり且つ信号としては周期的矩形波を主として、周期的三角波に就いては抵抗結合増幅器に於て考察したのみであるが、多段増幅器に就いてはオ5章を参照されたい。又 任意の周期波入力に対する単段並びに多段増幅器の解析に就いてはオII篇 オ3章及びオ4章を参照せられたい。





第 4-1-1 表

$F_{11} = \frac{1}{\Delta}$	$F_{12} = \frac{R_a C p + 1}{\Delta}$
$F_{21} = \frac{L p + R}{\Delta}$	$F_{22} = -\frac{R_a}{\Delta}$
茲に	
$\Delta = L C R_a p^2 + (L + R R_a C) p + R + R_a$	

## 第4章 周期的衝激波に対する単一同調回路単段増幅器の増幅特性

### 4.1 一次側に同調回路を有する単一回路増幅器<sup>(15)(18)</sup>

オ4.1.1図(a)に示す如く、一次側に同調回路を有する単一回路増幅器にオ4.1.2図に示す如き周期的矩形波及び周期的矩形変調波が入来せる場合の出力電圧 $e_o$ の過渡値並びに定常値をオ2章に説起せる解析法を適用して求めよう。

オ4.1.1図(b)は該回路の等価回路にして、オリ周期目の電流並びに電圧の過渡値を図示の如くに設定する時は次の微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Ra i_{an} + v_n &= -\mu e_{gn}(t) \\ (L \frac{d}{dt} + R) i_n - v_n &= 0 \\ -i_{an} + i_n + C \frac{dv_n}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1)$$

上式中の $i_{an}$ は抵抗分 $Ra$ のみを流れる電流で“計算を簡単にする為、之を消去し得られた微分方程式を行列形式を用いて表現すれば”下記の如くになる。

$$\begin{pmatrix} Ra & RaC \frac{d}{dt} + 1 \\ L \frac{d}{dt} + R & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu e_{gn}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

上式を(2.1.2)式と比較すれば次の対応を得る。

$$\begin{pmatrix} [Z(D)] & [\Lambda] \\ [\mu] & [Y(D)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ra & RaC \frac{d}{dt} + 1 \\ L \frac{d}{dt} + R & -1 \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

$$\begin{pmatrix} [e_n(t)] \\ [\Delta_n(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu e_{gn}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

以下順を追って所要の公式の誘導を行へば“次の如く”である。

#### (1) 行列 $[F(p)]$ の計算

(2.1.4)式に(4.1.3)式を代入すれば、所要の行列 $[F(p)]$ が得られる。その結果を

$$[F(p)] = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

と置き、各要素の計算結果を表示すれば、オ4.1.1表の如くになる。

#### (2) 行列 $[f(t)]$ の計算

(4.1.6)及びオ4.1.1表の結果を(2.1.7)式に代入して得られる計算結果を

第 4-1-2 表

$f_{11} = \frac{\varepsilon^{\alpha t}}{LCR_a\beta} \sin \beta t$	$f_{12} = \frac{\varepsilon^{\alpha t}}{L} \left( \frac{a + (1/CR_a)}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t \right)$
$f_{22} = -\frac{\varepsilon^{\alpha t}}{LC\beta} \sin \beta t$	$f_{21} = \frac{\varepsilon^{\alpha t}}{CR_a} \left( \frac{a + (R/L)}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t \right)$

茲に

$$a = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2CR_a}, \quad \beta = \sqrt{\frac{R+R_d}{LCR_a} - a^2}$$

第 4-1-3 表

$\chi_{11} = \varepsilon^{\alpha t} \left( \frac{a + (1/CR_a)}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t \right)$	$\chi_{12} = \frac{1}{L\beta} \varepsilon^{\alpha t} \sin \beta t$
$\chi_{22} = \varepsilon^{\alpha t} \left( \frac{a + (R/L)}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t \right)$	$\chi_{21} = -\frac{1}{C\beta} \varepsilon^{\alpha t} \sin \beta t$

$$[f(t)] = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

と置けば、行列  $[f(t)]$  の各要素はオキ1.2表に示すか"女"になる。

(3) 行列  $[X(t)]$  の計算

此の場合に在つては (4.1.3) 式より

$$\begin{pmatrix} [L][C] \\ [C][L] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R_0 C \\ L & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

なるを以て、上式及び (4.1.7) 式並にオキ1.2表の結果を (2.1.7) 式に代入して、所要の  $[X(t)]$  の値を求めれば

$$[X(t)] = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad (4.1.9)$$

となる。但し  $[X(t)]$  の各要素はオキ1.3表に示すか"女"である。

(4) 逆行列  $\{[C] - [X(t_0)]\}^{-1}$  の計算

(4.1.9) 式より  $\{[C] - [X(t_0)]\}^{-1}$  の値を計算する時は次の如くになる。

$$\{[C] - [X(t_0)]\}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 1-x_{22}^0 & x_{12}^0 \\ x_{21}^0 & 1-x_{11}^0 \end{pmatrix} \quad (4.1.10)$$

$$D = (1-x_{11}^0)(1-x_{22}^0) - x_{12}^0 x_{21}^0$$

但  $x_{ij}^0$  なる記号は  $x_{ij}|_{t=t_0}$  の意味で、以下斯る記法に従ふものとする。

オキ1.3表の結果を上式に代入する時は

$$D = 1 - 2\varepsilon^{\alpha t_0} \cos \beta t_0 + \varepsilon^{2\alpha t_0} \quad (4.1.11)$$

(5) 行列  $[X(t_0)]^{n-1}$  の計算

次ぎに電流並に電圧の過渡値の算定に必要なる行列  $[X(t_0)]^{n-1}$  の値を Sylvester の定理を用ひて算定しよう。然るに  $[X(t_0)]$  の特有方程式はオキ1.4表の結果を利用すれば

$$\lambda^2 - 2\varepsilon^{\alpha t_0} \cos \beta t_0 \lambda + \varepsilon^{2\alpha t_0} = 0$$

となる。従つて今の場合の4特有根は

$$\lambda_1 = \varepsilon^{(\alpha + j\beta)t_0} \quad \text{又} \quad \lambda_2 = \varepsilon^{(\alpha - j\beta)t_0}$$

なる2根にて表へられる。之を (1.3.11) 式に代入すれば、所要の  $[X(t_0)]^{n-1}$  の値が得られるが、今の場合には両特有根は共軛なるに依り

$$[X(t_0)]^{n-1} = 2 \times \left[ \text{Real part of } \lambda_1^{n-1} \frac{\lambda_2 [C] - [X(t_0)]}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \quad (4.1.12)$$

なる式を用ふれば"良い。従つて次の結果を得る。

第 4.1.4 表

$Q_{11}^0 = \left( q_1 + \frac{\alpha + (1/CR_\alpha)}{\beta} q_2 \right) / D$	$Q_{12}^0 = \frac{1}{L\beta D} q_2$
$Q_{22}^0 = \left( q_1 + \frac{\alpha + (R/L)}{\beta} q_2 \right) / D$	$Q_{21}^0 = -\frac{1}{C\beta D} q_2$
<p>茲に</p> $q_1 = 1 - \varepsilon^{\alpha t_0} \cos \beta t_0 - \varepsilon^{(n-1)\alpha t_0} \cos(n-1)\beta t_0 + \varepsilon^{n\alpha t_0} \cos(n-2)\beta t_0$ $q_2 = \varepsilon^{\alpha t_0} \sin \beta t_0 - \varepsilon^{(n-1)\alpha t_0} \sin(n-1)\beta t_0 + \varepsilon^{n\alpha t_0} \sin(n-2)\beta t_0$ $D = 1 - 2\varepsilon^{\alpha t_0} \cos \beta t_0 + \varepsilon^{2\alpha t_0} \quad [(4.12) \text{ 式再掲}]$	



$$[X(t_0)]^{n+1} = \varepsilon^{(n+1)t_0} \begin{pmatrix} \cos(n-1)\beta t_0 + \frac{\alpha + (V_{CRa})}{\beta} \sin(n-1)\beta t_0 & \frac{1}{L\beta} \sin(n-1)\beta t_0 \\ -\frac{1}{C\beta} \sin(n-1)\beta t_0 & \cos(n-1)\beta t_0 + \frac{\alpha + (R/L)}{\beta} \sin(n-1)\beta t_0 \end{pmatrix} \quad (4.1.13)$$

(6) 行列  $\{[Q] - [X(t_0)]\}^{-1} \{[Q] - [X(t_0)]^{n+1}\}$  の計算

$$\{[Q] - [X(t_0)]\}^{-1} \{[Q] - [X(t_0)]^{n+1}\} \equiv [Q(t_0)] = \begin{pmatrix} Q_{11}^0 & Q_{12}^0 \\ Q_{21}^0 & Q_{22}^0 \end{pmatrix} \quad (4.1.14)$$

と置き, (4.1.10), (4.1.13) 及び (4.1.3) 表の結果を代入して  $[Q(t_0)]$  の各要素の値を求めるときは (4.1.4) 表に示すか如き結果を得る。

次に行列  $[Y(t)]$  の計算を施行するのであるが,

(a) 周期的矩形波に対しては

$$E_{gn}(p) = \mathcal{L}^{-1} E_{gn}(t) = E_g (1 - \varepsilon^{-pt}) \quad (4.1.15)_a$$

(b) 周期的矩形変調波に対しては (2.4.2 表参照)

$$E_{gn}(p) = \frac{E_g}{p^2 + \omega^2} [\omega p \cos \varphi + p^2 \sin \varphi - \{ \omega p \cos(\omega t_1 + \varphi) + p^2 \sin(\omega t_1 + \varphi) \} \varepsilon^{-pt_1}] \quad (4.1.15)_b$$

但し (4.1.15)<sub>b</sub> 式に於ては,  $\omega$  は搬送波の角周波数を又  $\varphi$  は  $t=0$  に於ける搬送波の位相角を意味する。

以下 周期的矩形波及び 周期的矩形変調波を印加せる両者の場合に対して計算を進める。

[A] 入力波が周期的矩形波なる場合

(7)a 行列  $[Y(t)]$  の計算

(2.1.7) 式に (4.1.5), (4.1.6) 及び (4.1.15)<sub>a</sub> 並びに (4.1.1) 表の結果を代入すれば

$$[Y(t)] = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.16)$$

となる。但し

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\mu E_g}{R+R_a} \left\{ \left[ 1 - \varepsilon^{\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[ 1 - \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \left\{ \cos \beta(t-t_1) - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta(t-t_1) \right\} \right] H(t-t_1) \right\} \\ \varphi_2 &= -\frac{\mu E_g R}{R+R_a} \left\{ \left[ 1 - \varepsilon^{\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\delta}{\beta} \sin \beta t \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[ 1 - \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \left\{ \cos \beta(t-t_1) - \frac{\delta}{\beta} \sin \beta(t-t_1) \right\} \right] H(t-t_1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.17)_a$$

$$\text{故に} \quad \delta = \alpha + \frac{1}{CR} + \frac{1}{CRa}$$

(8)a 第 $n-1$ 周期の終末値  $\begin{pmatrix} i_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}_{t=t_0}$  の計算

信号波入来の当初に於ける電流及び電圧の初期値を零と仮定すれば

$$\begin{pmatrix} i_1^0 \\ v_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1^0 \\ v_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.18)$$

と仮定して, (2.1.8), (2.1.9)<sub>b</sub> 及び (2.1.9)<sub>2</sub> 式より

$$\begin{pmatrix} i_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}_{t=t_0} = \begin{pmatrix} i_{n-1}^0 \\ v_{n-1}^0 \end{pmatrix} = \{ [I] - [X(t_0)] \}^{-1} \{ [I] - [X(t_0)]^{n-1} \} [\varphi(t_0)] \quad (4.1.19)$$

となる。上式に (4.1.10), (4.1.14), (4.1.16) 及び (4.1.17)<sub>a</sub> 並べに於4.1.3表及び4.1.4表の結果を代入すれば次の結果を得る。

$$\begin{pmatrix} i_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}_{t=t_0} = \begin{pmatrix} i_{n-1}^0 \\ v_{n-1}^0 \end{pmatrix} = -\frac{\mu E_g}{(R+R_a)D} \begin{pmatrix} \xi_n - \frac{\alpha}{\beta} \eta_n \\ R(\xi_n - \frac{\delta}{\beta} \eta_n) \end{pmatrix} \quad (4.1.20)_a$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= f(\cos, n) - f(\cos, 1) \\ \eta_n &= f(\sin, n) - f(\sin, 1) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.21)_a$$

$$\left. \begin{aligned} f(\cos, n) &= e^{n\alpha t_0} \left[ \cos n\beta t_0 - e^{-\alpha t_1} \cos(n\beta t_0 - \beta t_1) \right. \\ &\quad \left. - e^{\alpha t_0} [\cos(n-1)\beta t_0 - e^{-\alpha t_1} \cos\{(n-1)\beta t_0 - \beta t_1\}] \right] \\ f(\sin, n) &= e^{n\alpha t_0} \left[ \sin n\beta t_0 - e^{-\alpha t_1} \sin(n\beta t_0 - \beta t_1) \right. \\ &\quad \left. - e^{\alpha t_0} [\sin(n-1)\beta t_0 - e^{-\alpha t_1} \sin\{(n-1)\beta t_0 - \beta t_1\}] \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.22)_a$$

以上にて此の場合に必要な予備的計算を一応完了することを得た。依つて最後に所要の出力を算定しよう。

然るに出力電圧は

$$e_{on} = M \frac{di_n}{dt} \quad (4.1.23)$$

にて與へられるから,  $i_n$  が分れば直ちに所要の出力が計算出来る。(2.1.6) 式を今の場合に適用すれば

$$\begin{pmatrix} i_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{n-1}^0 \\ v_{n-1}^0 \end{pmatrix}$$

従つて

$$i_n = \varphi_1 + \chi_{11} i_{n-1}^0 + \chi_{12} v_{n-1}^0 \quad (4.1.24)$$

上式に (4.1.17) (4.1.20)<sub>a</sub> 及び4.1.3表の結果を代入すれば

$$i_n = -\frac{\mu E_g}{R+R_a} \left\{ \left[ 1 - e^{\alpha t} (\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t) \right] - \left[ 1 - e^{\alpha(t-t_1)} \cos \beta(t-t_1) - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta(t-t_1) \right] \right\} \\ \times H(t-t_1) + \frac{1}{D} e^{\alpha t} \left\{ (\xi_n - \frac{\alpha}{\beta} \eta_n) \cos \beta t - (\frac{\alpha}{\beta} \xi_n + \eta_n) \sin \beta t \right\} \quad (4.1.25)_a$$

或は上式を(4.1.23)式に代入すれば

$$e_{on} = -\frac{g_m M E_g}{L C \beta} \left\{ e^{\alpha t} \sin \beta t - e^{\alpha(t-t_1)} \sin \beta(t-t_1) H(t-t_1) \right. \\ \left. - \frac{1}{D} e^{\alpha t} (\xi_n \sin \beta t + \eta_n \cos \beta t) \right\} \quad (4.1.26)_a$$

とする。此れ所要の出力電圧の過渡値を與へるもので有限値の初等函数の集合を以て表現せられてゐる。

次に定常状態に対する出力電圧を $e_o$ とおけば

$$e_o = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{on} = -\frac{g_m M E_g}{L C \beta} \left\{ e^{\alpha t} \sin \beta t - e^{\alpha(t-t_1)} \sin \beta(t-t_1) H(t-t_1) \right. \\ \left. - \frac{1}{D} e^{\alpha t} (\xi \sin \beta t + \eta \cos \beta t) \right\} \quad (4.1.27)_a$$

とする。但し(4.1.21)<sub>a</sub>及(4.1.22)<sub>a</sub>より

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = -f(\cos, 1) = e^{\alpha t_0} (e^{\alpha t_0} \cos \beta t_0) + e^{\alpha t_0} (\cos \beta t_0 - e^{\alpha t_0} \cos \beta t_0) \\ \eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = -f(\sin, 1) = -e^{\alpha t_0} \sin \beta t_0 + e^{\alpha t_0} (\sin \beta t_0 + e^{\alpha t_0} \sin \beta t_0) \quad (4.1.28)_a$$

尚参考名にインダクタス中の電流 $i_n$ の定常値を求めれば(4.1.25)<sub>a</sub>式より

$$i = \lim_{n \rightarrow \infty} i_n = -\frac{\mu E_g}{R+R_a} \left\{ \left[ 1 - e^{\alpha t} (\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t) \right] - \left[ 1 - e^{\alpha(t-t_1)} \cos \beta(t-t_1) - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta(t-t_1) \right] \right\} H(t-t_1) \\ + \frac{1}{D} e^{\alpha t} \left\{ (\xi - \frac{\alpha}{\beta} \eta) \cos \beta t - (\frac{\alpha}{\beta} \xi + \eta) \sin \beta t \right\} \quad (4.1.29)_a$$

を得る。次に出力波の振幅即ち包絡線に就いて一言して置かう。以下問題を定常状態に限定することとするが過渡状態に対しては、以下の諸式に於て $\xi, \eta$ を夫々 $\xi_n, \eta_n$ と置換すれば良い。所要の包絡線を $E_o(t)$ とシ

$$E_o(t) = \begin{cases} \frac{g_m M E_g}{L C \beta} \Phi_1(t) & t = +0 \sim t_1 - 0 \\ \frac{g_m M E_g}{L C \beta} \Phi_2(t) & t = t_1 + 0 \sim t_0 - 0 \end{cases} \quad (4.1.30)_a$$

と置けば(4.1.27)<sub>a</sub>式より

$$\Phi_1(t) = e^{\alpha t} \sqrt{(1 - \xi/D)^2 + (\eta/D)^2} \\ \Phi_2(t) = e^{\alpha t} \sqrt{(1 - \xi/D)^2 + (\eta/D)^2 - 2 e^{-\alpha t_1} \left\{ (1 - \xi/D) \cos \beta t_1 + (\eta/D) \sin \beta t_1 \right\} + e^{-2\alpha t_1}} \quad (4.1.31)_a$$

を得る。即ち  $\Phi(t)$  並びに  $\Phi(t)$  は共に指数函数的に減衰し、 $t=t_1$  に於ける振幅の飛躍量の目安は、(4.1.30) a 及び (4.1.31) a より

$$\{\Phi_1(t_1-0)\}^2 - \{\Phi_1(t_1+0)\}^2 = 2\varepsilon^{\alpha t_1} \left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right) \cos \beta t_1 + \frac{\eta}{D} \sin \beta t_1 \right\} - 1 \quad (4.1.32)$$

一方  $t=0$  に於ける飛躍量の目安は  $\{\Phi_2(t_0-0)\}^2 - \{\Phi_2(t_0+0)\}^2$  に與へられるから (4.1.31) a 式よりその値を求め得る。然し乍ら (4.1.27) a 式の物理的意味を考察すれば、より簡単に次の如くにて求めることが出来る。即ち (4.1.27) a 式右辺に於て  $(1/D)\varepsilon^{\alpha t}(\dots)$  なる項は、今考察中の周期より以前に入来せる信号波に依つて誘起せられた現象を表はし、一方  $\varepsilon^{\alpha t} \sin \beta t - \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \sin \beta(t-t_1) H(t-t_1)$  なる項は該周期に新たに入来せる信号波に依つて誘起せられる現象を意味する。従つて  $\Phi(t_0-0)$  ( $\Phi(-0)$ ) の値として (4.1.27) a 式の  $(1/D)\varepsilon^{\alpha t}(\dots)$  なる項のみの  $t=0$  に於ける振幅の値を採用すれば“充分”であつて

$$\Phi_2(t_0-0) = \frac{1}{D} \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

となる。依つて所要の  $t=0$  に於ける振幅の飛躍量の目安は

$$\{\Phi_2(t_0-0)\}^2 - \{\Phi_2(t_0+0)\}^2 = 1 - 2\frac{\xi}{D} \quad (4.1.33)$$

にて與へられる。

[B] 入力波が周期的矩形波調波なる場合

(7) 行列  $[\varphi(t)]$  の計算

(2.1.7) 式は (4.1.5), (4.1.6), (4.1.15) b 並びに表 4.1.1 表の結果を代入する時 (4.1.16) の各要素は下記の如くになる。

$$\varphi_1 = -\frac{gmE_g}{Z} \left[ -\cos(\omega t + \varphi + \theta_1) \{1 - H(t-t_1)\} + \varepsilon^{\alpha t} \{f(\varphi) \cos(\beta t - \theta_2) - \sin \varphi \sin(\beta t - \theta_2)\} - \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \{f(\omega t_1 + \varphi) \cos(\beta t - t_1 - \theta_2) - \sin(\omega t_1 + \varphi) \sin(\beta t - t_1 - \theta_2)\} H(t-t_1) \right]$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & -\frac{gmE_g}{Z} \left[ \{ \omega L \sin(\omega t + \varphi + \theta_1) - R \cos(\omega t + \varphi + \theta_1) \} \{1 - H(t-t_1)\} \right. \\ & + \varepsilon^{\alpha t} \{ (\alpha L + R) f(\varphi) - \beta L \sin \varphi \} \cos(\beta t - \theta_2) - \{ \beta L f(\varphi) + (\alpha L + R) \sin \varphi \} \sin(\beta t - \theta_2) \\ & \left. - \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \{ (\alpha L + R) f(\omega t_1 + \varphi) - \beta L \sin(\omega t_1 + \varphi) \} \cos(\beta t - t_1 - \theta_2) \right. \\ & \left. - \{ \beta L f(\omega t_1 + \varphi) + (\alpha L + R) \sin(\omega t_1 + \varphi) \} \sin(\beta t - t_1 - \theta_2) \right] H(t-t_1) \end{aligned} \quad (4.1.17) b$$

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\left(1 + \frac{R}{R_a} - LC\omega^2\right)^2 + \left(\frac{L}{R_a} + CR\right)^2 \omega^2} \\ \theta_1 &= \tan^{-1} \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2}{-2\alpha\omega} = \tan^{-1} \frac{R + R_a - LCR_a\omega^2}{\omega(L + CRR_a)} \\ \theta_2 &= \tan^{-1} \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2}{-2\alpha\beta} = \tan^{-1} \frac{R + R_a + LCR_a(\omega^2 - 2\beta^2)}{\beta(L + CRR_a)} \\ f(x) &= \frac{1}{\beta} (\alpha \sin x + \omega \cos x) \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

(8)  $n-1$  周期に於ける終末値  $\begin{pmatrix} i_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}_{t=t_0}$  の計算

周期的矩形波の場合に於けると同様に信号入来の当初に於ける初期値を $\pi$ と仮定すれば、所要の終末値は(4.1.19)に(4.1.14), (4.1.16) (4.1.17), 並びにオ4.1.3表及びオ4.1.4表の結果を代入すれば次の如くなる。

$$i_{n-1}^0 = -\frac{g_m E_g}{Z_D} \left[ f(\varphi) \{g(1, \cos) - g(n, \cos)\} - \sin \varphi \{g(1, \sin) - g(n, \sin)\} \right. \\ \left. - f(\omega t_1 + \varphi) \{h(1, \cos) - h(n, \cos)\} + \sin(\omega t_1 + \varphi) \{h(1, \sin) - h(n, \sin)\} \right]$$

$$v_{n-1}^0 = -\frac{g_m E_g}{Z_D} \left[ \{ (L\alpha + R)f(\varphi) - L\beta \sin \varphi \} \{g(1, \cos) - g(n, \cos)\} \right. \\ \left. - \{ (L\alpha + R)\sin \varphi - L\beta f(\varphi) \} \{g(1, \sin) - g(n, \sin)\} \right. \\ \left. - \{ (L\alpha + R)f(\omega t_1 + \varphi) - L\beta \sin(\omega t_1 + \varphi) \} \{h(1, \cos) - h(n, \cos)\} \right. \\ \left. + \{ (L\alpha + R)\sin(\omega t_1 + \varphi) - L\beta f(\omega t_1 + \varphi) \} \{h(1, \sin) - h(n, \sin)\} \right]$$

(4.1.20)b

$$g(n, \sin) = e^{\alpha t_0} [\sin(n\beta t_0 - \theta_2) - e^{\alpha t_0} \sin\{(n-1)\beta t_0 - \theta_2\}]$$

$$h(n, \sin) = e^{\alpha(n t_0 - t_1)} [\sin\{\beta(n t_0 - t_1) - \theta_2\} - e^{\alpha t_0} \sin\{\beta(n-1)t_0 - t_1 - \theta_2\}]$$

(4.1.22)b

以上にては要する予備的計算を一先づ完了することを得た。次に之等の結果を利用して所要の出力電圧の過渡値を求めて見よう。其の爲には先づ(4.1.24)式に依つて $i_n$ を求むる必要がある。簡単の爲に(4.1.24)式の右辺が2項及びオ3項を一括して

$$X_{11} i_{n-1}^0 + X_{12} v_{n-1}^0 = -\frac{g_m E_g}{Z_D} e^{\alpha t} (A_n \sin \beta t + B_n \cos \beta t) \quad (4.1.35)$$

と置き、左辺にオ4.1.3表及び(4.1.20)b式を代入して $A_n$ 及び $B_n$ の値を算定すれば下記の如くなる。

$$A_n = -f(\varphi) \{g(1, \sin) - g(n, \sin)\} - \sin \varphi \{g(1, \cos) - g(n, \cos)\} \\ + f(\omega t_1 + \varphi) \{h(1, \sin) - h(n, \sin)\} + \sin(\omega t_1 + \varphi) \{h(1, \cos) - h(n, \cos)\} \\ B_n = f(\varphi) \{g(1, \cos) - g(n, \cos)\} - \sin \varphi \{g(1, \sin) - g(n, \sin)\} \\ - f(\omega t_1 + \varphi) \{h(1, \cos) - h(n, \cos)\} + \sin(\omega t_1 + \varphi) \{h(1, \sin) - h(n, \sin)\}$$

(4.1.36)

又(4.1.24)を(4.1.23)に代入すれば出力電圧の過渡値は次式依つて與へらる。

$$e_{on} = M \frac{di_n}{dt} = M \left\{ \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d}{dt} (X_{11} i_{n-1}^0 + X_{12} v_{n-1}^0) \right\} \quad (4.1.37)$$



然るに (4.1.16) 式より

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} = & -\frac{g_m E_g}{Z} \left\{ \omega \sin(\omega t + \varphi + \theta_1) \{1 - H(t - t_1)\} \right. \\ & + \varepsilon^{\alpha t} \{ (\alpha f(\varphi) - \beta \sin \varphi) \cos(\beta t - \theta_2) - (\beta f(\varphi) + \alpha \sin \varphi) \sin(\beta t - \theta_2) \} \\ & \left. - \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \left[ \{ \alpha f(\omega t_1 + \varphi) - \beta \sin(\omega t_1 + \varphi) \} \cos(\beta t - t_1 - \theta_2) \right. \right. \\ & \left. \left. - \{ \beta f(\omega t_1 + \varphi) + \alpha \sin(\omega t_1 + \varphi) \} \sin(\beta t - t_1 - \theta_2) \right] H(t - t_1) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

又 (4.1.35) 式より

$$\frac{d}{dt} (\chi_{11} i_{n-1}^0 + \chi_{12} v_{n-1}^0) = -\frac{g_m E_g}{ZD} \varepsilon^{\alpha t} \{ (A_n \alpha - B_n \beta) \sin \beta t + (A_n \beta + B_n \alpha) \cos \beta t \} \quad (4.1.39)$$

となる。(4.1.37) 乃至 (4.1.39) が所要の周期的矩形波調波に対する電力電圧の逐次値を與へるものである。

定常状態に於ける電力は (4.1.37) 式より

$$e_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{on} = M \left\{ \frac{d\varphi}{dt} + \lim_{n \rightarrow \infty} (\chi_{11} i_{n-1}^0 + \chi_{12} v_{n-1}^0) \right\} \quad (4.1.40)$$

然るに (4.1.39) 式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\chi_{11} i_{n-1}^0 + \chi_{12} v_{n-1}^0) = -\frac{g_m E_g}{ZD} \varepsilon^{\alpha t} \{ (A\alpha - B\beta) \sin \beta t + (A\beta + B\alpha) \cos \beta t \} \quad (4.1.41)$$

茲に

$$\begin{aligned} A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= -f(\varphi) g(1, \sin) - \sin \varphi g(1, \cos) \\ &\quad + f(\omega t_1 + \varphi) h(1, \sin) + \sin(\omega t_1 + \varphi) h(1, \cos) \\ B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n &= f(\varphi) g(1, \cos) - \sin \varphi g(1, \sin) \\ &\quad - \{ f(\omega t_1 + \varphi) h(1, \cos) - \sin(\omega t_1 + \varphi) h(1, \sin) \} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \\ B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \end{aligned}} \right\} (4.1.42)$$

以上にて一応所期の計算式を誘導し得た言及であるが、次ぎに実用を便を考慮して之等の計算式を簡單化しよう。即ち衝撃波の幅  $t_1$  を  $\omega t_1 = 2m\pi$  ( $m$  は整数) と仮定し\*、且つ

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{LC} & Q_1 &= \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} & Q_2 &= \frac{Rq}{\omega_0 L} = \omega_0 CRa \\ Q &= \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} & \delta &= Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

\* 次節の数値計算の結果より明かなる如く電力波の包絡線に於ける限り  $\omega t_1$  の満す条件には無関係である。

と置き、過渡本力電圧(4.1.37)式を實用使用周波数範囲内に於て簡單化するには

$$e_{on} \cong -GE_g \{ \varphi(t) + \chi_n(t) \} \quad (4.1.37)'$$

但し

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sin(\omega t + \varphi + \theta_1) - E^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi - \theta_2) \\ &\quad - \{ \sin(\omega t + \varphi + \theta_1) - E^{\alpha(t-t_1)} \sin(\beta t - t_1 + \varphi - \theta_2) \} H(t - t_1) \end{aligned} \quad (4.1.38)'$$

$$\chi_n(t) = \frac{1}{D} E^{\alpha t} \{ -B'_n \sin(\beta t + \varphi) + A'_n \cos(\beta t + \varphi) \} \quad (4.1.39)'$$

茲に

$$\begin{aligned} A'_n &= -\{g(1, \sin) - g(n, \sin)\} + \{h(1, \sin) - h(n, \sin)\} \\ B'_n &= \{g(1, \cos) - g(n, \cos)\} - \{h(1, \cos) - h(n, \cos)\} \end{aligned} \quad (4.1.36)'$$

にて(4.1.34)式は

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\omega_0}{2Q}, \quad \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_2} \right)^2} \cong \omega_0 \\ \theta_1 &= +g^{-1} Q \left\{ \left( 1 + \frac{1}{Q_1 Q_2} \right) \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right\} \cong +g^{-1} Q \left\{ \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right\} = -tg^{-1} \delta \\ \theta_2 &= +g^{-1} \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{Q_1^2} + \frac{1}{Q_2^2} \right) + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{\omega^2}}{\frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_2} \right)^2}} \cong +g^{-1} Q \left\{ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right\} \frac{\omega}{\omega_0} \cong +g^{-1} \delta = -\theta_1 \end{aligned} \quad (4.1.34)'$$

又Tに

$$G = \frac{g_m \omega_0 M Q}{p}, \quad P = \sqrt{1 + Q^2 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{Q_1 Q_2} \right) \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right\}^2} \cong \sqrt{1 + \delta^2} \quad (4.1.44)$$

一方定常本力電圧は(4.1.40)式より

$$e_o = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{on} = -GE_g \{ \varphi(t) + \chi(t) \} \quad (4.1.40)'$$

但し

$$\chi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(t) = \frac{1}{D} E^{\alpha t} \{ -B' \sin(\beta t + \varphi) + A' \cos(\beta t + \varphi) \} \quad (4.1.41)'$$

$$\begin{aligned} \text{茲に} \quad A' &= -g(1, \sin) + h(1, \sin) \\ &= E^{\alpha t_0} \{ -\sin(\beta t_0 - \theta_2) - E^{\alpha t_0} \sin \theta_2 \} + E^{\alpha t_2} \{ \sin(\beta t - \theta_2) + E^{\alpha t_0} \sin(\beta t + \theta_2) \} \\ B' &= g(1, \cos) - h(1, \cos) \\ &= E^{\alpha t_0} \{ \cos(\beta t_0 - \theta_2) - E^{\alpha t_0} \cos \theta_2 \} - E^{\alpha t_2} \{ \cos(\beta t_2 - \theta_2) - E^{\alpha t_0} \cos(\beta t + \theta_2) \} \end{aligned} \quad (4.1.42)'$$

と作る。

次ぎに前と同様のり場合の本力電圧の包絡線に就いて一言しよう。(4.1.34)'に依り

は  $\theta_1 \cong -\theta_2$  なる関係あるを以て、お力の包絡線を

$$E_0(t) = \begin{cases} G E_g \Phi_1(t) & t = +0 \sim t_1 - 0 \\ G E_g \Phi_2(t) & t = t_1 + 0 \sim t_2 - 0 \end{cases} \quad (4.1.30)_b$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t) &= \sqrt{1 - 2\varepsilon^{\alpha t} \left[ \cos \Delta \omega t - \frac{1}{D} \left\{ -B' \cos(\Delta \omega t + \theta_1) + A' \sin(\Delta \omega t + \theta_1) \right\} \right]} \\ &\quad + \varepsilon^{2\alpha t} \left\{ 1 + \frac{2}{D} (B' \cos \theta_2 + A' \sin \theta_2) + \frac{1}{D^2} (B'^2 + A'^2) \right\} \\ \Phi_2(t) &= \varepsilon^{\alpha t} \sqrt{1 + \frac{2}{D} (A' \sin \theta_2 + B' \cos \theta_2) + \frac{1}{D^2} (B'^2 + A'^2)} + \varepsilon^{-2\alpha t_1} \\ &\quad \times \sqrt{1 - 2\varepsilon^{-\alpha(t-t_1)} \left[ \cos \Delta \omega(t-t_1) - \frac{1}{D} \left\{ A' \sin(\Delta \omega(t-t_1) - \theta_2) - B' \cos(\Delta \omega(t-t_1) - \theta_2) \right\} \right]} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{但し } \Delta \omega = \omega - \beta$$

(4.1.31)<sub>b</sub>

然るに上式は入力の搬送波が  $t=0$  の時に有する位相角  $\varphi$  には無関係であり、お力の包絡線に關する限り、周知の如く、 $\varphi$  の値には影響されないことが分る。

但も (4.1.31)<sub>b</sub> 式より

$$\Phi_1(t_1 - 0) = \Phi_2(t_1 + 0)$$

なる関係あるを以て  $t=t_1$  に於てお力の振幅に飛躍は無く連続的であることが分る。更に (4.1.31)<sub>b</sub> 式より

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t_1) \varepsilon^{\alpha(t-t_1)} \quad (4.1.45)$$

なる関係がある。一方  $t=0$  に於ては入力が矩形波なる場合には於けると同様の考察に依り

$$\Phi_1(+0) = \frac{1}{D} \sqrt{B'^2 + A'^2} = \Phi_2(t_1 - 0) (= \Phi_1(-0)) \quad (4.1.46)$$

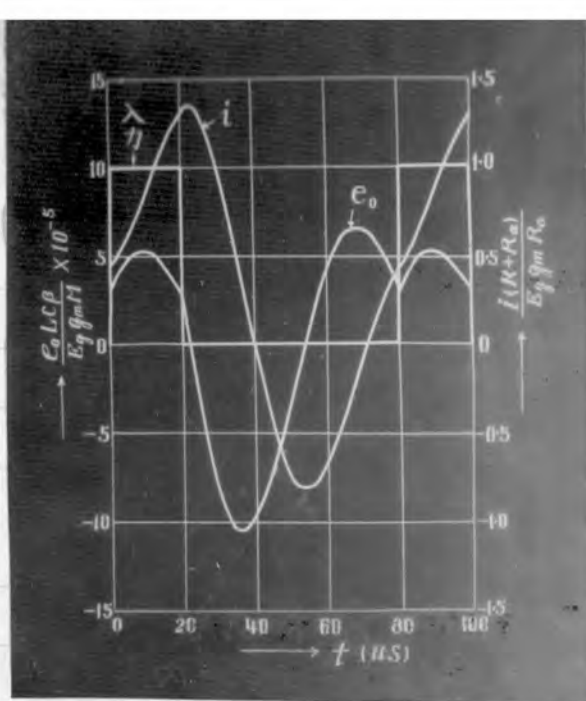
従つて  $t=0$  に於ても包絡線は連続的である。

特に同調せる場合には

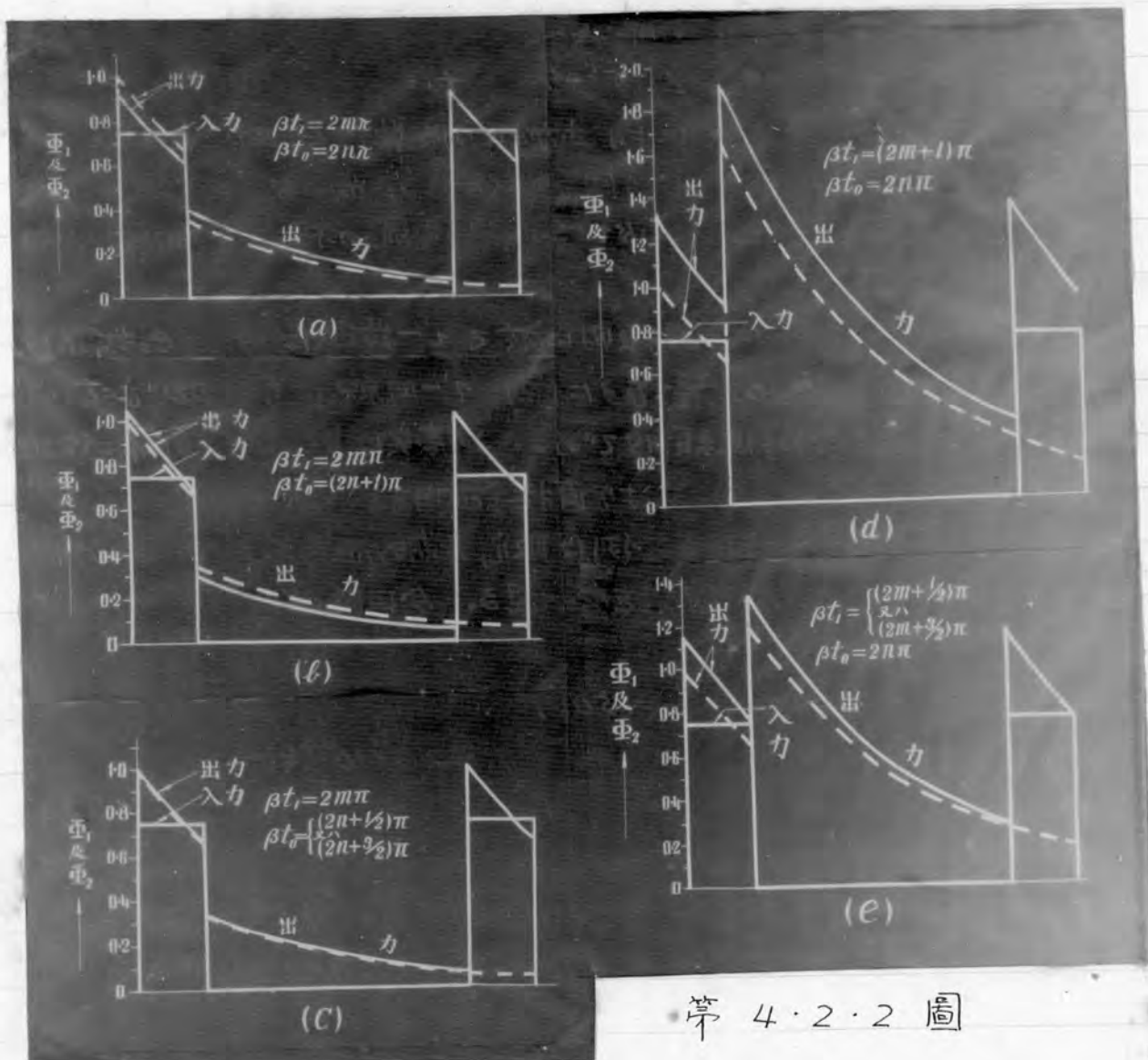
$$\left. \begin{aligned} \omega &= \beta & \text{従つて } \Delta \omega &= 0 \\ \theta_1 &= -\theta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.47)$$

なるを以て

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t) &= \left\{ 1 - \varepsilon^{\alpha t} \left( 1 + \frac{B'}{D} \right) \right\} \\ \Phi_2(t) &= \varepsilon^{\alpha t} \left\{ \varepsilon^{-\alpha t_1} - \left( 1 + \frac{B'}{D} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.31)_b'$$



第 4 · 2 · 1 圖



第 4 · 2 · 2 圖

但し今の場合には

$$B' = (\varepsilon^{\alpha t_0} - \varepsilon^{\alpha t_2})(\cos \beta t_0 - \varepsilon^{\alpha t_0}) \quad (4.1.48)$$

たいて、 $\beta t_0 = 2m\pi$  なる時は

$$\frac{B'}{D} = \frac{\varepsilon^{\alpha t_0}(1 - \varepsilon^{-\alpha t_1})}{1 - \varepsilon^{\alpha t_0}} \quad (4.1.49)$$

となる。

## 4.2 出力波の数値計算例及び物理的意味の考察

前節の結果に数値計算を施し、得られた出力波の内容を解析結果と比較し、そこから物理的意味を検討しよう。

一例として回路定数を

$$R_a = 10 \text{ k}\Omega, \quad R = 30 \Omega, \quad L = 1 \text{ mH}, \quad C = 0.1 \mu\text{F}$$

と選定し、且つ矢形衝撃波の時間定数を

$$t_1 = 2 \times 10^{-5} \text{ 秒}, \quad t_2 = 6 \times 10^{-5} \text{ 秒}, \quad t_0 = 8 \times 10^{-5} \text{ 秒}$$

とし、(4.1.27)a 及び (4.1.29)a 式により出力電圧の定常値  $E_0$  及び  $L$  を流れる電流の定常値  $i_0$  を図示すれば、図 4.2.1 図のようになる。尚上記の数値例は実問題と著しく懸隔せるも、出力電圧及びコイル中の電流の様相を強調せんとする意図に外ならない。

図より明かなように入力電圧の不連続時に於て  $i_0$  曲線は勿論  $E_0$  曲線も連続的である。然るに  $E_0 \propto \frac{di_0}{dt}$  なるに依り、 $i_0$  曲線は  $t=0$  及び  $t=t_1$  に於てその切線（一次微係数）は連続的である。この事実は、数値計算に依ることもなく、(4.1.27)a 及び (4.1.29)a 式より直接証明することが出来る。

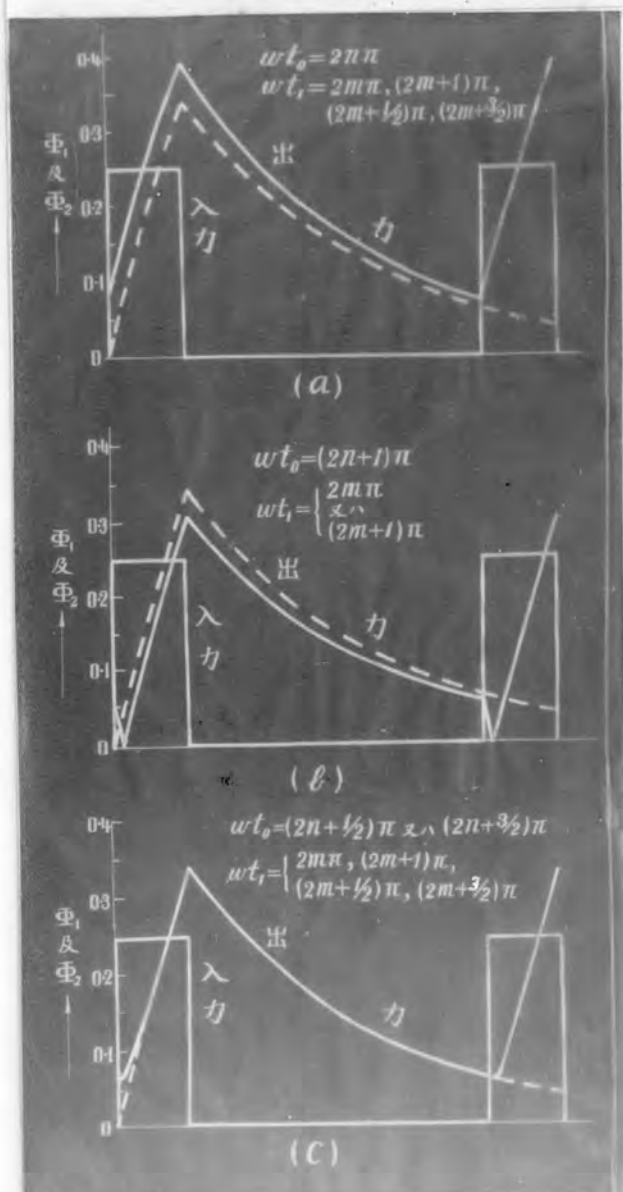
次に高周波増幅器回路を例に取り、周期的矩形波並びに矩形波変調波を増幅せる場合の出力の定常値を求めて見る。今回路並べに入力の諸定数を

$$\omega_0 = 10^6, \quad Q_1 = 100, \quad Q_2 = 150,$$

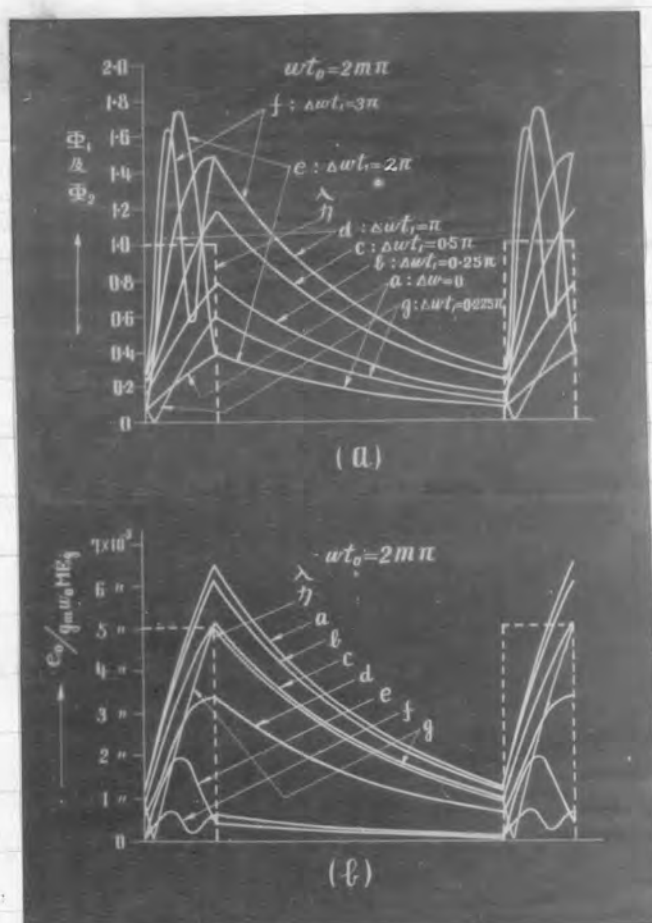
$$t_1 \cong 5 \times 10^{-5} \text{ 秒}, \quad t_2 \cong 2 \times 10^{-4} \text{ 秒}, \quad t_0 \cong 2.5 \times 10^{-4} \text{ 秒}$$

と仮定する。先づ入力波が矢形波なる場合の定常出力の包絡線を (4.1.31)a 式より求めれば、図 4.2.2 図のようになる。但し矢形波の時間定数は、上記の値の近傍に於て、夫々図示の各条件を満足する様選定してある。図中実線及び点線は単一入来波 ( $t_2 = \infty$ ) に対する出力の包絡線である。図





第 4·2·3 圖



第 4·2·4 圖

より、前記の  $t=0$  及び  $t=t_1$  に於ける包絡線の不連続の様子が明らかであろう。

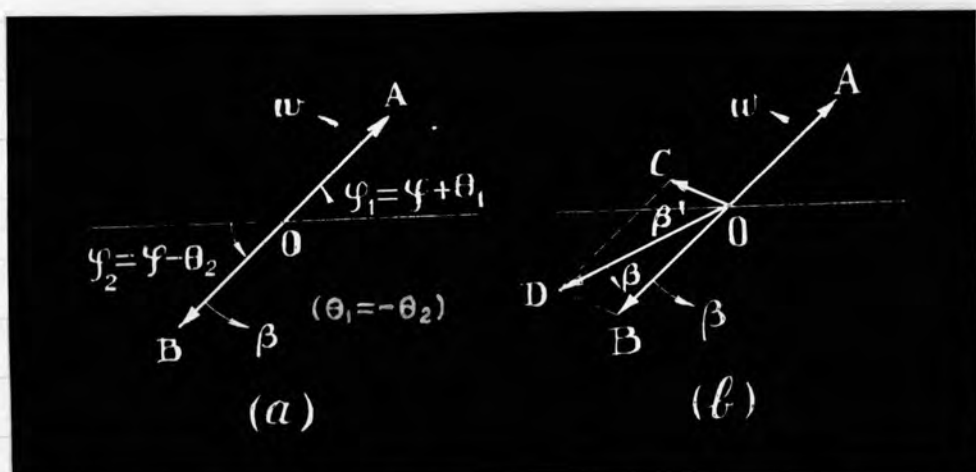
次に同一の常数にて入力矩形波或調波なる場合の出力波の包絡線を (4.1.40) 式に依り図示すれば、 $\omega_1=2, 3$  図及び  $\omega_1=2, 4$  図を得る。但し入力時間定数は前と同様、図示の条件を満足せしめてある。然して  $\omega_1=2, 3$  図は  $\omega_1=\beta$  即ち所謂同調せる場合の出力にて、実線は単一入束波 ( $t_1=\infty$ ) に対する出力である。一方  $\omega_1=2, 4$  図は  $\omega_1 \neq \beta$  即ち離調せる場合の出力を表す。但し同図 (a) は (4.1.31) 式の  $\omega_1(t)$  及び  $\omega_2(t)$  に相当する値を、一方同図 (b) は増度  $Q$  を考慮に入れた出力を示す。今の場合には前記せる包絡線出力は  $t=0$  及び  $t_1$  に於て連続的であり、且つ  $\omega_1$  の満たす条件には無関係である。之等の図より直ちに次の事が分る。

- (1)  $t=0$  の近傍に於ける波形が種々変化し、 $\omega_1=2, 3$  図 (b) 及び  $\omega_1=2, 4$  図 g の如く クビ となることあり、且つ同調せる場合に在っても  $\omega_1$  の条件に依り出力の大きさが異なる。
- (2)  $t=0$  及び  $t=t_1$  に於て波形は連続である。
- (3) 離調せる場合には離調が大になるにつれて出力波形は直線より前方に凸になり更に離調すると凹凸を生ずる。

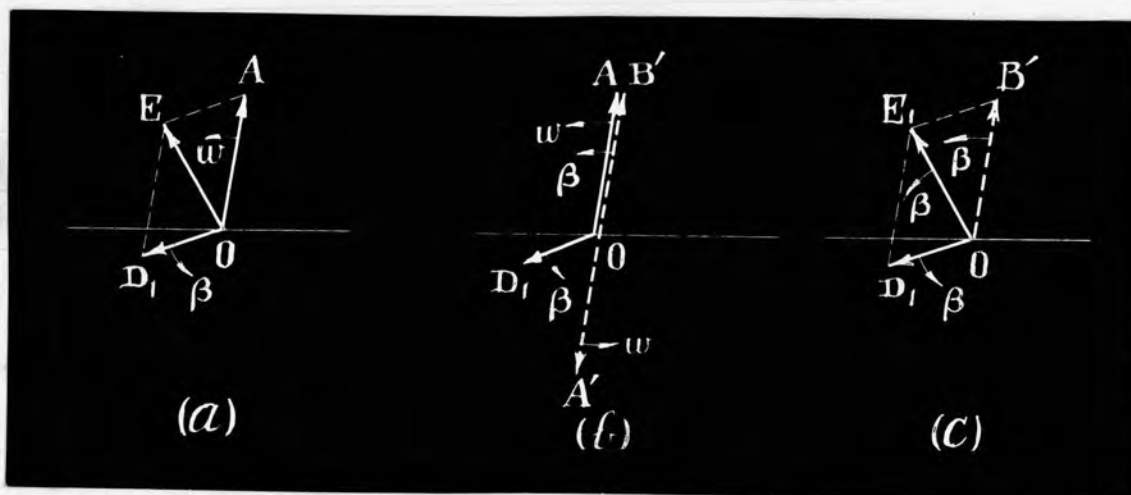
又て斯る出力波の本構成の物理的意味は未だ知らざることに入力波の条件が茲に論じたとは異なる場合の出力波形を予測する上に便利であるから由是たるを顧みず、前節の計算結果を基礎にして簡単に考察すれば、次の如くである。

#### 1). $\omega_1=2, 2$ 図に就て

此の場合の入力は  $t=0$  の瞬間に加へられた  $+E_0$  なる電圧と  $t=t_1$  なる瞬間に加へられた  $-E_0$  なる電圧とを分解して考えることが出来る。然るに  $t=0$  なる瞬間には既に L-C 回路には、それ以前に到来せる信号に依つて或る自由振動が誘起せられてゐる。{(4.1.27) 式右辺の  $e^{\alpha t}(\dots)$  にて表される振動} 斯る振動に対して  $t=0$  なる瞬間に加へられた  $+E_0$  なる信号に依つて誘起せられた自由振動 {(4.1.27) 式右辺の  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ } にて表される振動} が如何なる位相差を以て重疊されるかに依つて  $t=0$  以後の出力波の振幅の大きさが異なる。此の事は  $t=t_1$  に於ても全く同様である。一例を上げると、 $\omega_1=2, 2$  図 (a) は  $t=0$  及び  $t_1$  に於て上述の両自由振動が共に反対位相にて重疊され、振幅が最小となる場合で、同図 (d) は共に同相となり振幅最大の場合である。



第 4.2.5 圖



第 4.2.6 圖

$t=0$  及び  $t=t_1$  に於ける入力波の不連続は振幅即ち包絡線についての事で、高周波そのものはギザギザの如く連続なることは云ふ迄もない。

2). オ4.2.3図及びオ4.2.4図に就いて

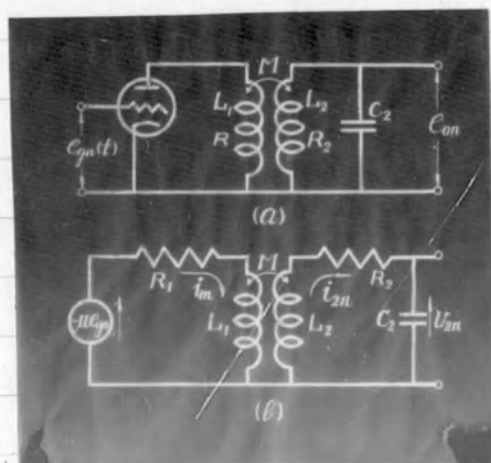
此の場合の入力は  $t=0$  なる瞬間にカへられる  $+E_g \sin(\omega t + \varphi)$  と  $t=t_1$  なる瞬間にカへられる  $-E_g \sin(\omega t + \varphi)$  とに分けられる。然るに  $t=0$  なる瞬間にカへられ  $+E_g \sin(\omega t + \varphi)$  によって  $\omega$  なる角周波数と有する非減衰強制振動と、 $\beta$  なる角周波数と有し且つ  $1/\beta$  なる減衰率を以て減衰する自由振動とを伴する。{(4.1.29)式参照} 然るに之等兩振動はオ4.2.5図(a)に示す如く  $t=0$  なる瞬間にはその振幅相等しく且つ位相が互対なる故、両者は互に打消し、入来信号に依って誘起する入力電圧の包絡線はオ4.2.3図の真線で示す如く0より始まる。従つて  $t=0$  に於て入力電圧の包絡線はオ4.2.3図及びオ4.2.4図の如く連続となる。{(4.1.46)式参照} 然るに  $t=0$  なる瞬間にはオ4.2.5図(b)の  $\vec{OC}$  に示すが如き自由振動が其の時に到来せる信号に依つて誘起せられ  $t=0$  音着振動の復元として残存してゐる。{(4.1.41)式が之に該当する} この  $\vec{OC}$  に対して  $\vec{OA}$  が如何なる位相差を以て重畳されるかに依つて  $t=0$  の近傍に於ける入力波の相違を生ずる。例へばオ4.2.3図(a)はこの位相差が略々0、(b)は大体  $\pi$ 、(c)は  $\pi/2$  (又は  $3\pi/2$ ) なる場合である。

然して  $t=0 \sim t_1$  に在つてはオ4.2.5図(b)に示す  $\vec{OA}$  なる非減衰強制振動と  $\vec{OB}$  なる減衰自由振動とが共存する結果、入力波の振幅は、 $\omega = \beta$  即ち同調時には時間と共に指數函数的に増大し、{(4.1.31)式及びオ4.2.3図参照} 離調時には兩振動が喰ひ現象を起し、離調間が甚しくなると入力波は凹凸を生ずる様になる。(オ4.2.4図参照) 従つて山の数は凡そ  $\Delta\omega t_1 / 2\pi$  にて與へられることが容易に分る。

他方  $t=t_1$  に在つても全く同様にオ4.2.6図は之をベクトル的に説明するものである。即ち同図(a)は  $t=t_1-0$  なる瞬間を示すもので  $\vec{OA}$  及び  $\vec{OB}$  は夫々オ4.2.5図(b)の  $\vec{OA}$  及び  $\vec{OB}$  の  $t=t_1$  に於ける値を示し、(b)図及び(c)図は  $t=t_1+0$  なる瞬間を示す。然して(b)図に於て真線を以て示すベクトルは、その瞬間にカへられた  $-E_g \sin(\omega t + \varphi)$  に依つて誘起せられる強制振動( $\vec{OA}'$ )及び自由振動( $\vec{OB}'$ )を表す。然るに前記せる處に従へば

$$\vec{OA}' = -\vec{OA}, \quad \vec{OB}' = -\vec{OB}$$

なるを以て  $\vec{OB}' = \vec{OA}$  にして結局(c)図の如きベクトル図となり、合成ベクトル  $\vec{OE}$  は(a)図の  $\vec{OE}$  に相等しくなる。従つて  $t=t_1$  なる瞬間に於ても入力波の包絡線は、



第 4.3.1 圖



$\omega$  の値の如何に拘らず連続的に  $\omega$  が増加する以後に在つては ~~共振現象~~  $\beta$  なる角周波数の自由振動のみ存在する結果常に  $|\alpha|$  なる減衰率を以て指數函数的に減衰する事が分る。

最後に入力波の歪を小さくする為の條件に就て一言して置かう。上述の考察に従へば歪の原因をなしてゐるのは  $1 - \beta$  なる角周波数を有する減衰自由振動である。従つて與へられた  $\omega$ ,  $\omega_c$  及び  $\omega_s$  の値に対して  $|\alpha|$  の値を可及的大にしたい、有差無差自由振動を速かに減衰せしめる時は、歪の小さい入力が必要である。その為には (4.1.34)' の式より明かになく  $Q$  を大にする必要がある。(此の事は一面該回路の通過帯域幅を広げる事を意味する。\*) 然し乍ら之に応じて (4.1.34) 式の利得  $G$  が減少するのは止むを得ない。

#### 4.3 ニ次側に同調回路を有する単一同調回路増幅器<sup>(15)</sup>

第4.3.1圖(a)に示すかゝる増幅器を、第4.3.2圖(b)の周期的矩形波変調波が通過せる場合の定常状態における入力電圧の計算式を定める。第4.3.1圖(b)はその等価回路を示す。但し

$$R_i = R + R_a \quad (4.3.1)$$

今  $n$  周期目に於ける電流及び電圧を図示の如くに仮定する時は次の關係がある。

$$\begin{pmatrix} L_1 \frac{d}{dt} + R_i & -M \frac{d}{dt} & 0 \\ -M \frac{d}{dt} & L_2 \frac{d}{dt} + R_2 & 1 \\ 0 & -1 & C_2 \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{1n} \\ i_{2n} \\ v_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{eg}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

上式が今の場合の基礎微分方程式で (2.1.2) 式に相当する。以下4.1と全く同様にして入力電圧の定常値  $v_{2n}$  は次式に依つて與へられることを知る。

$$v_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n} = \varphi'(t) + \lambda'(t) \quad (4.3.3)$$

茲に

$$\varphi'(t) = -g_m M E_g \left[ -\frac{g(t)}{Z_{ia}} + \frac{1}{Z} \{ \omega \sin(\omega t + \varphi + \theta_1) + r e^{\alpha t} \} (\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi) \cos \beta t \right]$$

\* 通過帯域の中央周波数を  $f_0 (= \frac{\omega_0}{2\pi})$ , 帯域幅を  $\Delta f$ , 通過帯域内に於ける利得偏差を  $D$  とすれば

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} \sqrt{1-D^2} = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{1-D^2}$$

なる關係がある。(19)

$$-(\beta f(\varphi) + \alpha \sin \varphi) \sin(\beta t - \theta_2) \} - \frac{1}{Z} [ \omega \sin(\omega t + \varphi + \theta_1) + r e^{\alpha(t-t_1)} \{ (\alpha f(\omega t_1 + \varphi) - \beta \sin(\omega t_1 + \varphi)) \cos(\beta \bar{t} - \theta_2) - (\beta f(\omega t_1 + \varphi) + \alpha \sin(\omega t_1 + \varphi)) \sin(\beta \bar{t} - \theta_2) \} ] H(t-t_1) \quad (4.3.4)$$

$$x'(t) = -\frac{g_m \mu M E_g}{D Z} e^{\alpha t} \{ (A\alpha - B\beta) \sin \beta t + (A\beta + B\alpha) \cos \beta t \} \quad (4.3.5)$$

$$g(t) = (\omega \cos \varphi - \alpha \sin \varphi) e^{-\alpha t} - \{ \omega \cos(\omega t_1 + \varphi) - \alpha \sin(\omega t_1 + \varphi) \} e^{-\alpha(t-t_1)} H(t-t_1) \quad (4.3.6)$$

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{(a^2 + \omega^2)}{a R_a} \left\{ 3C_2(L_1 L_2 - M^2) a^2 - 2C_2(L_1 R_2 + L_2 R_1) a + (L_1 + R_1 R_2 C_2) \right\} \\ Z &= \frac{1}{R_a} \sqrt{\{ R_1 - C_2(L_1 R_2 + L_2 R_1) \omega^2 \}^2 + \{ (L_1 + R_1 R_2 C_2) - C_2(L_1 L_2 - M^2) \omega^2 \}^2 \omega^2} \\ r &= \sqrt{(a^2 + \omega^2) / \{ (a + \alpha)^2 + \beta^2 \}} \\ \theta_1 &= t_g^{-1} \frac{R_1 - C_2(L_1 R_2 + L_2 R_1) \omega^2}{\omega \{ (L_1 + R_1 R_2 C_2) - C_2(L_1 L_2 - M^2) \omega^2 \}} \\ \theta_2 &= t_g^{-1} \frac{-2\alpha\beta^2 + (a + \alpha)(\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2)}{-\beta \{ 3\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2 + 2\alpha\beta \}} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

然して  $\omega, \varphi, f(\varphi)$  は 4.1 に於けると同様で  $-a, \alpha \pm j\beta$  は

$$C_2(L_1 L_2 - M^2) p^3 + C_2(L_1 R_2 + L_2 R_1) p^2 + (L_1 + R_1 R_2 C_2) p + R_1 = 0$$

の根である。然して後述する如く通常  $a \gg |\alpha|$  なるを以て (4.3.4) の右辺に於ては  $e^{-\alpha t} \ll e^{\alpha t}$  と仮定してゐる。

又て通常使用される回路常数に対しては  $a \gg |\alpha|$  なる関係あるを以て根と係数の関係より三根の近似値を求めれば、

$$\begin{aligned} a &\cong \frac{(L_1 R_2 + L_2 R_1)}{(L_1 L_2 - M^2)} \\ \alpha &\cong -\frac{L_1 + R_1 R_2 C_2 - R/a}{2C_2(L_1 L_2 - M^2)}, \quad \beta \cong \sqrt{\frac{R_1}{a C_2(L_1 L_2 - M^2)} - \alpha^2} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

今簡単のため

$$\frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0, \quad \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = k (< 1), \quad \frac{R_1}{\omega_0 L_1} = Q_1, \quad \frac{\omega_0 L_2}{R_2} = \frac{1}{\omega_0 C_2 R_2} = Q_2 \quad (4.3.9)$$

とかけば、通常  $R \ll R_a$  なるを以て

$$Q_1 = \frac{R + R_a}{\omega_0 L_1} \cong \frac{R_a}{\omega_0 L_1} \quad (4.3.10)$$

にて且つ  $Q_i Q_j \gg 1 \quad (i, j = 1, 2)$

従つて(4.3.8)式は更に次の如くに表す事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\cong \frac{\omega_0}{1-k^2} \left( \frac{1}{Q_2} + Q_1 \right) \cong \frac{\omega_0 Q_1}{1-k^2} \\ \alpha &= -\frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q_2} + \frac{k^2}{Q_1} \right), \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \cong \omega_0 \end{aligned} \right\} (4.3.8)'$$

更に簡単な爲に

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Q} &= \left( \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \right) - \frac{1-k^2}{Q_1} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cong \frac{1}{Q_2} + \frac{k^2}{Q_1} \\ \delta &= Q \left\{ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right\} \end{aligned} \right\} (4.3.11)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} Z_a &\cong \left( \frac{Q_1}{1-k^2} \right)^2, \quad Z \cong \sqrt{1+\delta^2}/Q \ll Z_a \\ \theta_1 &\cong -tg^{-1} \delta, \quad \theta_2 \cong +tg^{-1} \delta = -\theta_1 \end{aligned} \right\} (4.3.7)'$$

$$r \cong 1$$

従つて今  $r=1$  と見做して(4.1.45)乃至(4.1.47)及び(4.1.38)式と今の場合の(4.3.3)乃至(4.4.5)式とを比較するに(4.3.4)式中の  $-g(t)/Z_a$  なる極めて減衰の強い非振動項を除けば両者は全く同じ形であり、且つ今の場合には  $\theta_1 = -\theta_2$  なる関係がある故に出力波形は4.1及び4.2に得られたものと全く同様で電基線(零電位線)が直線ではなく、 $-g(t)/Z_a$  なる形にてその上に高周波電力が重畳するものと考へれば良い。従つて  $gmMg(t)/Z_a$  の振幅は(4.3.6)及び(4.3.7)'より大凡

$$gmM \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{Z_a} \cong \frac{(1-k^2) gm \omega_0 M}{Q_1} \quad (4.3.12)$$

にて與へられ、一方(4.3.4)式より明かな如く定常高周波電力の振幅は

$$\frac{gm \omega M}{Z} = \frac{gm \omega_0 M Q}{\sqrt{1+\delta^2}} \quad (4.3.13)$$

となり前者に比して極めて大なるを以て  $-g(t)/Z_a$  なる項は無視して差支ない。従つて結局此の場合の出力は一次側で同音周を取り出す形式のものと全く同様である。

例へば4.1に於けると同様  $\omega_0 = 2\pi f$  と仮定し(4.3.3)式を簡単にすると

$$v_2 \cong -G_{eq} \{ f(t) + x(t) \} \quad (4.3.3)'$$

となる。但し

$$G = \frac{g_m \omega_0 M Q}{\sqrt{1 + \delta^2}}$$

にて、且つ  $\varphi(t)$  及び  $\lambda(t)$  は夫々  $(4.1.38)'$  及び  $(4.1.41)'$  と同じである。勿論之等の式に含まれた  $\alpha$  及び  $\beta$  の値としては  $(4.3.8)'$  の値を、 $Q$  及び  $\delta$  の値としては  $(4.3.11)$  式を採用するべきは言を換たない。

#### 4.4 第4章の総括

以上述べて来た単一同調回路増幅器の周期的信号波に対する増幅特性の解析結果を要約すれば次の如くである。

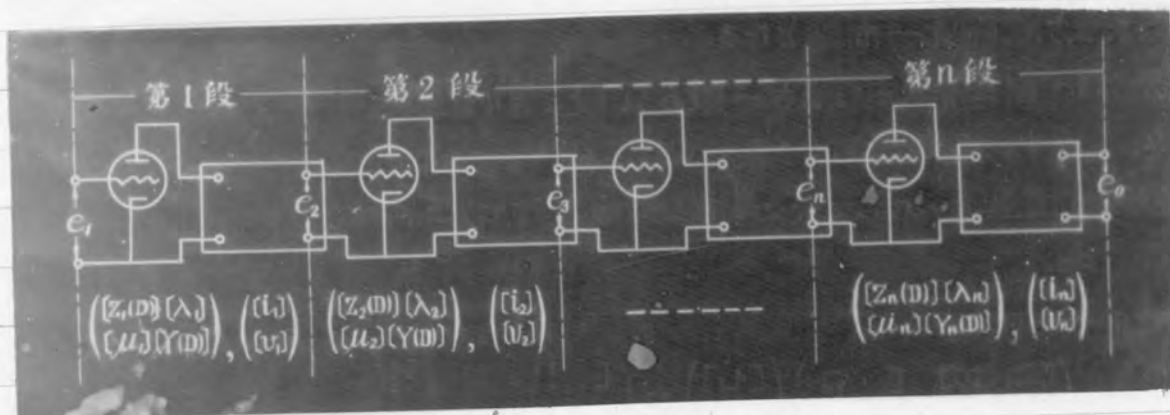
##### A) 信号波が周期的矩形波である場合

- (1) 入力の不連続部分に対応して出現する出力電圧の包絡線は不連続的に変化するか、之を構成する高周波そのものは連続である。
- (2) 出力電圧の振幅(包絡線)の大きさ並びに不連続部分に於ける飛躍量は衝撃波の継続時間並びに周期に依つて大なる影響を受ける。

##### B) 信号波が周期的矩形被変調波である場合

- (1) 入力被変調波の包絡線の不連続部分に対応する出力の包絡線は、L-C 振動回路が入力の搬送波に同調せると離調せるとを問はず、又衝撃波の幅及び周期の如何に關せず連続である。
- (2) 信号波の周期  $T$  の僅かな変化に対して、出力電圧の振幅(包絡線)は  $t = +0$  の近傍に於て著しく異なり、且つ振幅に大いなる差を生ずるか、衝撃波の幅  $T$  の僅かな変化に対しては影響されない。
- (3) 信号の搬送波の位相のずれは出力電圧の包絡線には無関係である。
- (4) 同調せる場合の出力電圧の振幅は指數函数的に変化するが離調が大になると出力電圧の包絡線に凹凸を生ずる。
- (5) 周期  $T$  及び衝撃波の幅  $\tau$  が一定であっても離調度の値の差異に依つて  $t = +0$  の近傍に於ける出力波の形状が著しく異なる。

而して之等の諸特性の量的關係を明確ならしむると共に、斯る特性の由來する物理的意味を明かならしめ、茲に取扱つたものとは異つた入力に対する出力波形の推測に便ならしめた。



第 5 · 1 · 1 图



## 第5章 多段増幅器並びに饋送増幅器の解析<sup>(20)</sup>

### 5.1 多段増幅器の基礎微分方程式

第2章に説述せる新解析法を適用して多段増幅器の周期的信号波に対する本力を解析せんとする場合 (2.1.1) 式或は (2.1.2) 式に対応する今の場合の基礎微分方程式の樹立方法が先づ問題となる。

今や5.1.1図に示すか如き一般の $n$ 段増幅器を考へ、各段の電氣的諸量を夫々その属する段數番号を添へる事に依つて区別する事図示の如くにする。然る時は各段増幅器に就いて夫々基礎微分方程式(2.1.1)式を求めれば一般に下記の如くになる。

や1段:—

$$\begin{pmatrix} [Z_1(D)] & [\lambda_1] \\ [\mu_1] & [Y_1(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [i_1] \\ [v_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_1] \\ [0] \end{pmatrix}$$

や2段:—

$$\begin{pmatrix} [Z_2(D)] & [\lambda_2] \\ [\mu_2] & [Y_2(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [i_2] \\ [v_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_2] \\ [0] \end{pmatrix}$$

-----

や $n$ 段:—

$$\begin{pmatrix} [Z_n(D)] & [\lambda_n] \\ [\mu_n] & [Y_n(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_n] \\ [0] \end{pmatrix}$$

(5.1.1)

簡單の爲に

$$\begin{pmatrix} [Z_n(D)] & [\lambda_n] \\ [\mu_n] & [Y_n(D)] \end{pmatrix} = [K_{nn}(D)]$$

$$\begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} = [g_n]$$

$$\begin{pmatrix} [e_n] \\ [0] \end{pmatrix} = [w_n]$$

(5.1.2)

と置き、(5.1.1)式を單一の行列形式に纏めて書けば下記の如くになる。

$$\begin{pmatrix} [K_{11}(D)] & [0_{12}] & \cdots & [0_{1n}] \\ [0_{12}] & [K_{22}(D)] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & [0_{n-1,n}] \\ [0_{n1}] & \cdots & [0_{nn-1}] & [K_{nn}(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [g_1] \\ [g_2] \\ \vdots \\ [g_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [w_1] \\ [w_2] \\ \vdots \\ [w_n] \end{pmatrix}$$

(5.1.3)

茲に  $[O_{ij}]$  は 0 を元素とする  $(i, j)$  次の長方形行列にして  $i$  は  $[K_{ii}(D)]$  の次数を  $j$  は  $[K_{jj}(D)]$  の次数を意味する。

(5.1.3) 式の右辺の  $[W_2][W_3] \cdots [W_n]$  なる行列は或る変換行列  $[\Phi_{n+1, n}(D)]$  ( $n=1, 2, \dots, n-1$ ) を適当に選定する時は次の関係を満足せしめることが出来る。

$$-[W_{n+1}] = [\Phi_{n+1, n}(D)][q_n] \quad (n=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.1.4)$$

然して変換行列  $[\Phi_{n+1, n}(D)]$  は通常視察に依り容易に決定し得るもので一般には次の形を取る。

$$[\Phi_{n+1, n}(D)] = \begin{pmatrix} [Z'_n(D)] & [\lambda_n] \\ [O] & [O] \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.1.5)$$

茲に  $[Z'_n(D)]$  は  $Z'_n(D) = L'_n D + R'_n$  を元素とする行列で、 $[\lambda_n]$  は 0 又は  $\pm 1$  を元素とする行列である。

次に (5.1.3) 式を (5.1.5) の関係を用いて書改めると

$$\begin{pmatrix} [K_{11}(D)] & [O_{12}] & \cdots & [O_{1n}] \\ [\Phi_{21}(D)] & & & \\ [O_{31}] & & & \\ \vdots & & & \\ [O_{n1}] & \cdots & [O_{nn-2}] & [\Phi_{nn-1}(D)] & [K_{nn}(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [q_1] \\ [q_2] \\ \vdots \\ [q_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [O] \\ \vdots \\ [O] \end{pmatrix} \quad (5.1.6)$$

が得られる。上式が所要の基礎微分方程式にして (2.1.1) 式に対応するものである。之れに於て章に説明せる解析法を適用すれば良い言である。即ち (2.1.1) 式と (5.1.6) 式とを比較対照すれば今の場合には

$$\begin{pmatrix} [Z(D)][\lambda] \\ [\mu][Y(D)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [K_{11}(D)] & [O_{12}] & \cdots & [O_{1n}] \\ [\Phi_{21}(D)] & & & \\ [O_{31}] & & & \\ \vdots & & & \\ [O_{n1}] & \cdots & [O_{nn-2}] & [\Phi_{nn-1}(D)] & [K_{nn}(D)] \end{pmatrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} (5.1.7)$$

$$\begin{pmatrix} [1] \\ [v] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [q_1] \\ [q_2] \\ \vdots \\ [q_n] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} [E(t)] \\ [\Delta(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [O] \\ \vdots \\ [O] \end{pmatrix}$$

にして、且つ簡單の爲に

$$\begin{pmatrix} [L_n] & [O] \\ [O] & [C_n] \end{pmatrix} = [P_{nn}], \quad \begin{pmatrix} [L'_n] & [O] \\ [O] & [O] \end{pmatrix} = [Q_{n+1, n}] \quad (5.1.8)^*$$

\*  $[P_{nn}]$  及び  $[Q_{n+1, n}]$  なる行列は夫々  $[K_{nn}(D)]$  及び  $[\Phi_{n+1, n}(D)]$  なる行列の  $D$  の係数を元素とする行列を意味する。

と置けば (2.1.3) 式右辺の  $\begin{pmatrix} [L] & [D] \\ [C] & [E] \end{pmatrix}$  なる値は

$$\begin{pmatrix} [L] & [D] \\ [C] & [E] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [P_{11}] & [Q_{12}] & \cdots & [Q_{1n}] \\ [Q_{21}] & & & \\ [Q_{31}] & & & \\ \vdots & & & \\ [Q_{n1}] & \cdots & [Q_{nn-1}] & [P_{nn}] \end{pmatrix} \quad (5.1.9)$$

となす。(5.1.7) 及び (5.1.9) の関係を利用すれば、新解析法適用の際必要な諸行列の計算は可成り手数を要するが極めて機械的に行い得るのであって、3章及び4章と全く同様にして多段増幅器の周期的信号波に対する出力電圧を有限箇の円函数並びに双曲線函数の集合として表現する事が出来る。

## 5.2 多段増幅器の解析に際し出現する諸行列の具体的計算法

前節に誘導せる基礎微分方程式に2章の新解析法を適用せんとする場合 (2.1.7) 式に依って定義せられた  $[F(p)]$ ,  $[X(t)]$ ,  $[\varphi(t)]$  或は  $([U] - [X(t)])^{-1}$  なる行列並びに  $[X(t_0)]$  の特有根等を求める必要がある。然るに (5.1.6) 或は (5.1.7) 及び (5.1.9) より明かな如く、今の場合の行列の次数は各段の行列の次数のみならず、段数の増大に伴って増大し、上述の諸行列の計算特に逆行列の演算は極めて複雑となり、その煩に堪へない。然し乍ら今の場合には幸にもその困難さの程度を各段の行列の中最大次数の行列に対する諸演算に伴ふ困難さの程度と殆んど同じからしめる事が可能なのである。以下之に就いて述べる。

### 1). 行列 $[F(p)]$ の計算法

(2.1.4) 式より明かな如く、行列  $[F(p)]$  は次の関係を満足する。

$$\begin{pmatrix} [Z(p)] & [\lambda] \\ [\mu] & [Y(p)] \end{pmatrix} [F(p)] = [U] \quad (5.2.1)$$

依つて  $[F(p)]$  を

$$[F(p)] = \begin{pmatrix} [F_{11}] & \cdots & [F_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [F_{n1}] & \cdots & [F_{nn}] \end{pmatrix} \quad (5.2.2)$$

と置き (5.1.7) の第一式 及び (5.2.2) を (5.2.1) に代入する時は次の関係を得る。

$$\begin{array}{l}
 [K_{11}(p)][F_{11}] = [0] \\
 [F_{12}] = [0], [F_{13}] = [0], \dots [F_{1n}] = [0] \\
 [\Phi_{21}(p)][F_{11}] + [K_{22}(p)][F_{21}] = [0] \\
 [K_{22}(p)][F_{22}] = [0] \\
 [F_{23}] = [0], [F_{24}] = [0], \dots [F_{2n}] = [0] \\
 [\Phi_{32}(p)][F_{21}] + [K_{33}(p)][F_{31}] = [0] \\
 [\Phi_{32}(p)][F_{22}] + [K_{33}(p)][F_{32}] = [0] \\
 [K_{33}(p)][F_{33}] = [0] \\
 [F_{34}] = [0], [F_{35}] = [0], \dots [F_{3n}] = [0] \\
 \vdots
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \{ (5.2.3), \\
 \{ (5.2.3)_2 \\
 \{ (5.2.3)_3
 \end{array} \right\} (5.2.3)$$

上式より  $[F_{ij}]$  を求めれば一般に次の如くなる。

$$[F_{ij}] = \begin{cases} [0] & (i < j) \\ [K_{ii}(p)]^{-1} & (i = j) \\ (-1)^{i+j} [K_{ii}(p)] \prod_{\lambda=i-1}^j \{ [\Phi_{\lambda+1,\lambda}(p)][K_{\lambda\lambda}(p)]^{-1} \} & (i > j) \end{cases} \quad (5.2.4)$$

2) 行列  $[X(t)]$  の計算法

$$[X(t)] = \begin{pmatrix} [X_{11}] & \dots & [X_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [X_{n1}] & \dots & [X_{nn}] \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

と置き, (2.1.7) 式に (5.1.9) 及び (5.2.2) を代入し  $[X(t)]$  の各要素の値を求めれば次の如くなる。

$$[X_{ij}] = \sum p \{ [F_{ij}][P_{ij}] + [F_{i,j+1}][Q_{j+1,j}] \} \quad (5.2.6)$$

3) 逆行列  $\{ [0] - [X(t_0)] \}^{-1}$  の計算法

$$\{ [0] - [X(t_0)] \}^{-1} = [B] = \begin{pmatrix} [B_{11}] & \dots & [B_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [B_{n1}] & \dots & [B_{nn}] \end{pmatrix} \quad (5.2.7)$$

とおけば

$$\{ [0] - [X(t_0)] \} [B] = [0] \quad (5.2.8)$$

なる関係がある。以下前述の  $[F(p)]$  の場合に於けると同様にして (5.2.5) 及び (5.2.7) 式を (5.2.8) 式に代入して  $[B]$  の各要素を求めるに次の漸化式を得る。

$$[B_{ij}] = \begin{cases} [0] & (i < j) \\ \{ [0] - [X_{ii}^0] \}^{-1} & (i = j) \\ \{ [0] - [X_{ii}^0] \}^{-1} \sum_{\lambda=j}^{i-1} [X_{i,\lambda}^0][B_{\lambda j}] & (i > j) \end{cases} \quad (5.2.9)$$

但し  $[x_{ij}^0]$  なる記号は次の如き意味を有する。即ち

$$[x_{ij}^0] = [x_{ij}]_{t=t_0}$$

4). 行列  $[x(t_0)]$  の特有根

$[x(t_0)]^n$  の計算或は安定条件の決定に必要な  $[x(t_0)]$  の特有根即ち

$$\delta \{ \alpha [\Pi] - [x(t_0)] \} = 0 \quad (5.2.10)$$

の根の性質を今に未する。

扱て (5.2.4) を (5.2.6) に代入する時は、 $i < j$  に対しては  $[x_{ij}] = [0]$  なる関係あることに注目し、(5.2.10) に (5.2.5) を代入する時は

$$\delta \begin{pmatrix} \{ \alpha [\Pi] - [x_{11}^0] \} & [0] & \cdots & [0] \\ -[x_{21}^0] & & & \\ \vdots & & & \\ -[x_{n1}^0] & \cdots & [x_{nn}^0] & \{ \alpha [\Pi] - [x_{nn}^0] \} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.2.11)$$

或は

$$\delta \{ \alpha [\Pi] - [x_{11}^0] \} \delta \{ \alpha [\Pi] - [x_{22}^0] \} \cdots \delta \{ \alpha [\Pi] - [x_{nn}^0] \} = 0 \quad (5.2.11)'$$

従つて次の結論を得る。 $[x(t_0)]$  の特有根は、各段増幅器が全く独立に存在すると考へた時の各段の  $[x(t_0)]$  行列 ( $[x_{ii}^0]$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) が之である。) の特有根の凡てを根とし且つそれ以外の根を有さない。

其の結論は各増幅器間に相互作用 (饋還) が無い今の場合には当然の事である。

次ぎに特別の場合として各段の回路定数が相等しい場合には

$$\left. \begin{aligned} [K(D)] &\equiv [K_{11}(D)] = [K_{22}(D)] = \cdots = [K_{nn}(D)] \\ [\Phi(D)] &\equiv [\Phi_{21}(D)] = [\Phi_{32}(D)] = \cdots = [\Phi_{n,n-1}(D)] \\ [P] &\equiv [P_{11}] = [P_{22}] = \cdots = [P_{nn}] \\ [Q] &\equiv [Q_{21}] = [Q_{32}] = \cdots = [Q_{n,n-1}] \end{aligned} \right\} \quad (5.2.12)$$

なる関係があるから

1) 行列  $[F(p)]$

(5.2.4) より

$$[F(p)] = \begin{cases} [0] & (i < j) \\ [K(p)]^{-1} & (i = j) \\ (-1)^{i+j} \{ [K(p)]^{-1} [\Phi(p)] \}^{i-j-1} [K(p)]^{-1} & (i > j) \end{cases} \quad (5.2.13)$$

然るに  $(-1)^{i+j} = (-1)^{i-j}$  なるを以て  $[F_{ij}]$  なる値は  $i-j$  なる値が一一定なりと



$i$  及び  $j$  それ自体の値に無関係に等しくなる。従つて  $[F_{ij}]$  の代りに  $i=j=k$  とて  $[F_k]$  と表現する事が出来る。以下之に準ずる事とする。然る時は

$$[F_k] = \begin{cases} [0] & (k < 0) \\ [K(p)]^{-1} & (k = 0) \\ (-1)^k \{ [K(p)]^{-1} [\Phi(p)] \}^{k-1} [K(p)]^{-1} & (k > 0) \end{cases} \quad (5.2.13)'$$

2) 行列  $[\chi(t)]$

(5.2.6) 及び (5.2.13)' より上と同様に

$$[\chi_k] = \begin{cases} [0] & (k < 0) \\ \delta p [K(p)]^{-1} [P] \cdot (= [\chi_0]) & (k = 0) \\ (-1)^k \delta p \{ [K(p)]^{-1} [\Phi(p)] \}^{k-1} \{ [K(p)]^{-1} [P] - [\Phi(p)]^{-1} [Q] \} & (k > 0) \end{cases} \quad (5.2.14)$$

3) 逆行列  $\{ [\Pi] - [\chi(t_0)] \}^{-1} = [B]$

(5.2.9) 式より

$$[B_k] = \begin{cases} [0] & (k < 0) \\ \{ [\Pi] - [\chi_0] \}^{-1} (= [B_0]) & (k = 0) \\ [B_0] \sum_{j=0}^{k-1} [\chi_{k-j}^0] [B_j] \{ [\chi_0^0] [B_0] \}^j & (k > 0) \end{cases} \quad (5.2.15)$$

4) 行列  $[\chi(t_0)]$  の特根

(5.2.11)' 式より

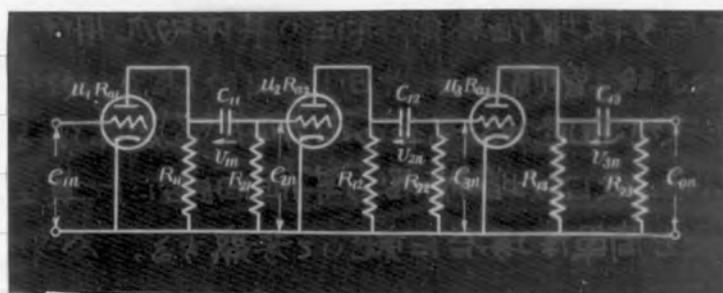
$$\delta \{ \alpha [\Pi] - [\chi(t_0)] \} = \{ \delta ([\Pi] - [\chi_0^0]) \}^n = 0 \quad (5.2.16)$$

従つて  $[\chi(t_0)]$  の特根は

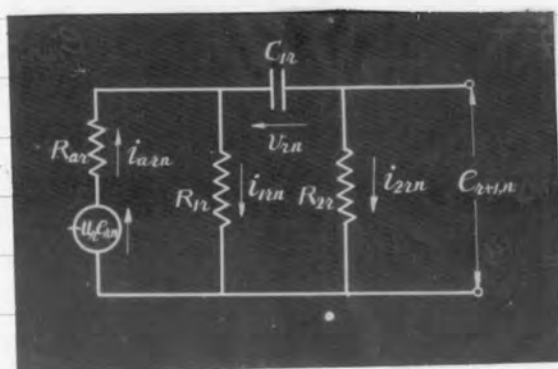
$$\delta (\alpha [\Pi] - [\chi(t_0)]) = 0 \quad (5.2.17)$$

の根、換言すれば、単段増幅器の場合の各特根が  $n$  重根として包含され且つその他の値を根としない。

又て (5.2.4), (5.2.6), (5.2.9), (5.2.11)' 或は (5.2.13)', (5.2.14), (5.2.15), (5.2.16) に依れば, 基元微分方程式 (5.1.6) 式の次数が如何程大であらうと, 本章に説く新解析法適用に際し計算すべき諸行列は, 各段増幅器が各々單獨に存在すると考へて, その個々に就いて諸行列を計算すれば, 之れ等の何れ直ちに成り立つ事が出来, 或る程度計算を簡便化し得る言である。



第 5.3.1 圖



第 5.3.2 圖

### 5.3 抵抗結合2段及び3段増幅器の周期的信号波増幅特性

以上説述した多段増幅器解析法の具体的な応用例としてオ5.3.1図に示すが如き抵抗結合3段増幅器を、オ3.1.2図(a)及び(b)に示すが如き周期的矩形波及び三角波が通過する場合の出力電圧の定常値を求めて見よう。

オ5.3.2図はオ9段目の増幅器の等価回路に1て真空管の内部静電容量等は凡て無視せる最も簡単な場合に就いて考察する。今オ9周期目の区渡電位及び電流を図示の如くに選定し、之にキルヒホッフの法則を適用、得られた方程式より  $i_{12n}$  及び  $i_{22n}$  を消去する時は (3.1.2) 式と全く同形の次式を得る。

$$\left( \frac{R_{02}^2 C_{12}}{R_{12} + R_{02}} \frac{d}{dt} + 1 \right) V_{2n} = - \frac{\mu_{12} R_{12}}{R_{12} + R_{02}} e_{2n} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (n=1, 2, 3) \quad (5.3.1)$$

$$\text{茲に} \quad R_{02}^2 = R_{12} R_{02} + R_{02} R_{02} + R_{02} R_{12}$$

上式は (5.1.1) 式に対応するもので、今の場合には次の関係がある。

$$\left. \begin{array}{l} [K_{12}(D)] = \frac{R_{02}^2 C_{12}}{R_{12} + R_{02}} D + 1 \\ [q_{2n}] = V_{2n} \\ [w_{2n}] = - \frac{\mu_{12} R_{12}}{R_{12} + R_{02}} e_{2n} \end{array} \right\} \quad (5.3.2)$$

一方

$$e_{2n+1,2} = R_{22} C_{12} \frac{dV_{2n}}{dt} \quad (5.3.3)$$

なる関係ある故、(5.1.4) なる関係を満足すべき  $[e_{2n+1,2}(D)]$  なる行列は (5.3.2) 及び (5.3.3) より観察に依り

$$[e_{2n+1,2}(D)] = \frac{\mu_{21} R_{12+1} R_{02} C_{12}}{R_{12+1} + R_{02+1}} D \quad (5.3.4)$$

となる事が分る。従って (5.1.6) 式に対応すべき基礎微分方程式は (5.3.2) 及び (5.3.4) より

$$\begin{pmatrix} \frac{D}{A_1} + 1 & 0 & 0 \\ b_1 D & \frac{D}{A_2} + 1 & 0 \\ 0 & b_2 D & \frac{D}{A_3} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1n} \\ V_{2n} \\ V_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C' e_{1n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.5)$$

茲に

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = \frac{R_{12} + R_{02}}{C_{12} R_{02}^2}, \quad b_2 = \frac{\mu_{21} R_{12+1} R_{02} C_{12}}{R_{12+1} + R_{02+1}} \\ C' = \frac{\mu_{12} R_{12}}{R_{12} + R_{02}} \end{array} \right\} \quad (5.3.6)$$

(5.3.5)を(2.1.2)式と比較すれば

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} [Z(D)] [Y] \\ [U] [Y(D)] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D A_1 + 1 & 0 & 0 \\ B_1 D & D A_2 + 1 & 0 \\ 0 & B_2 D & D A_3 + 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} [i_n] \\ [v_n] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{2n} \\ v_{3n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} [e_n(t)] \\ [i_n(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} [L] [D] \\ [D] [C] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/A_1 & 0 & 0 \\ B_1 & 1/A_2 & 0 \\ 0 & B_2 & 1/A_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.7)$$

なる対応をなすことを知る。依つて上記の關係を利用し 2.1 及び 2.3 に就てせる處に従ひ 第3章に於けると全く同様の計算に依り  $v_{2n}$  の定常値を求められより 所要の各増幅率のお力の定常値を求められ、次の如くになる。

a) 入力が周期的矩形波なる場合

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e_{2n} &= e_2 = -\mu_1 B_1 E_g R(A_1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} e_{3n} &= e_3 = \frac{\mu_1 \mu_2 B_1 B_2}{(A_1 - A_2)} E_g \{ A_1 R(A_1) - A_2 R(A_2) \} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} e_{4n} &= e_4 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3 B_1 B_2 B_3}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)} E_g \{ A_1^2 (A_2 - A_3) R(A_1) \\ &\quad + A_2^2 (A_3 - A_1) R(A_2) + A_3^2 (A_1 - A_2) R(A_3) \} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)_a$$

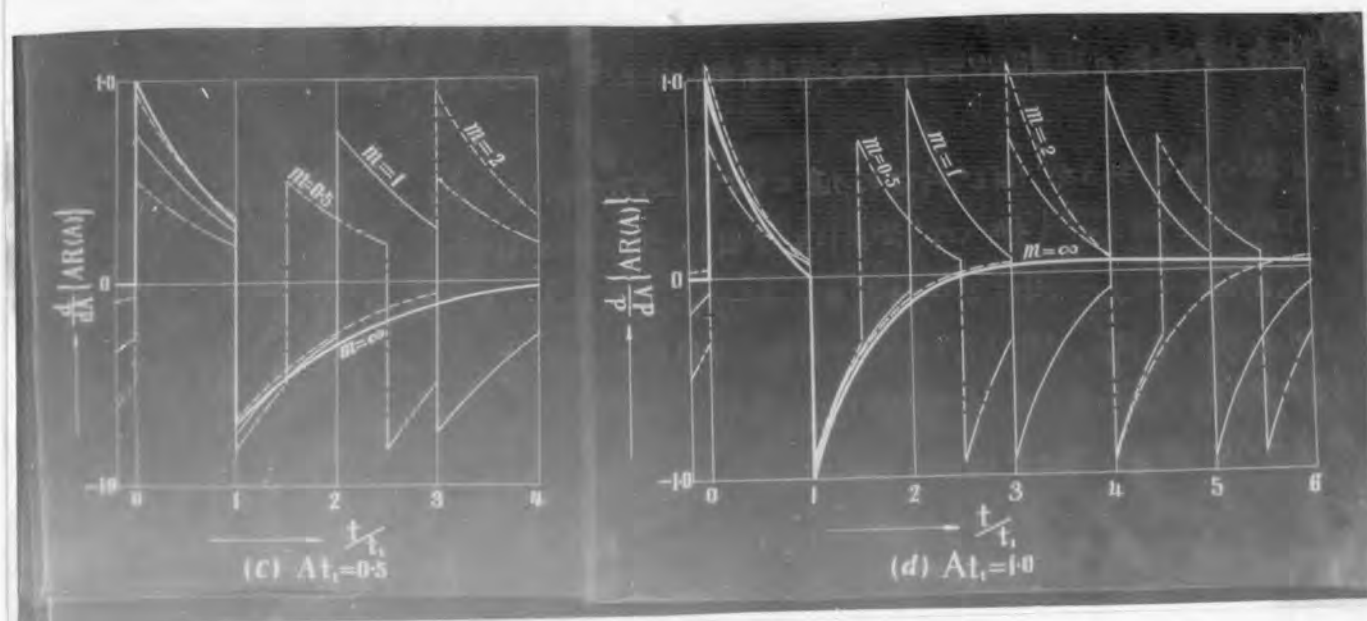
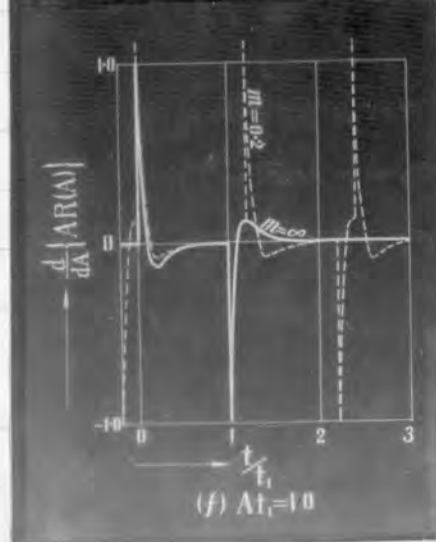
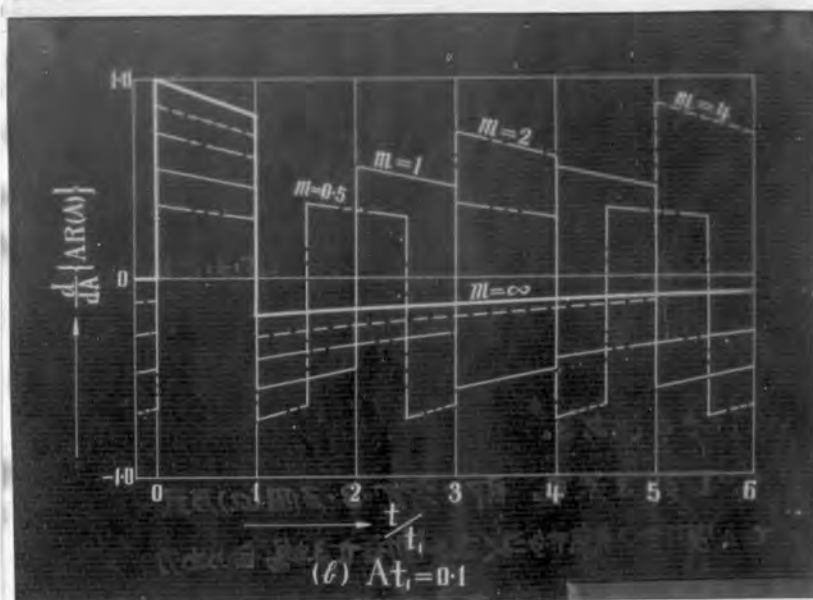
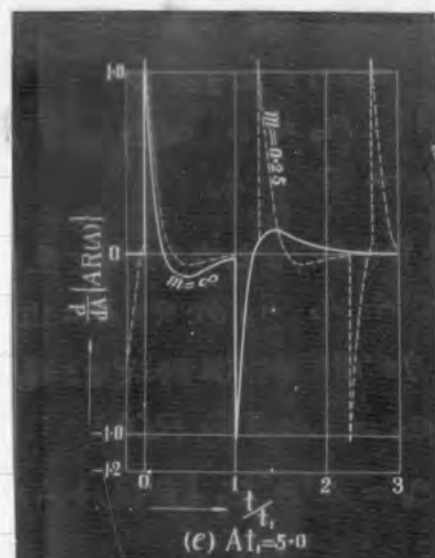
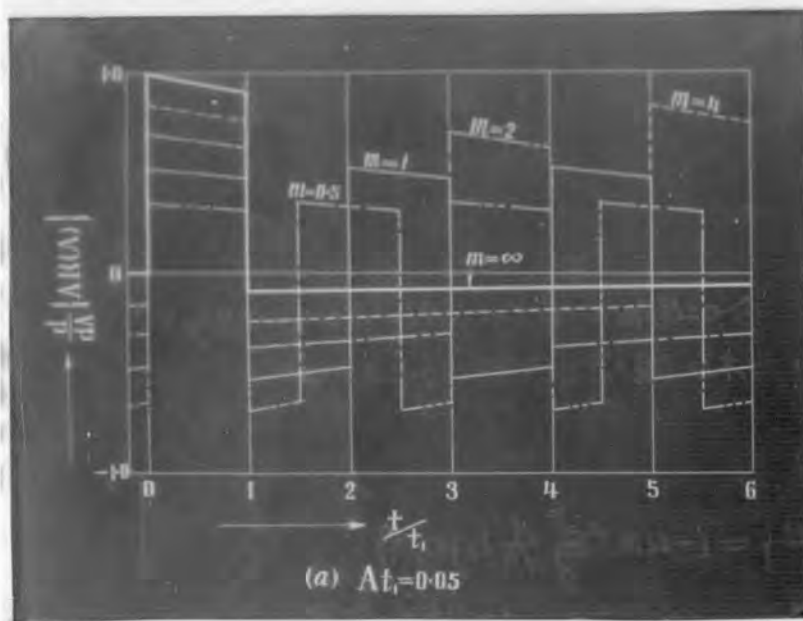
b) 入力が周期的三角波なる場合

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= -\mu_1 B_1 E_g T(A_1) \\ e_3 &= \frac{\mu_1 \mu_2 B_1 B_2}{(A_1 - A_2)} E_g \{ A_1 T(A_1) - A_2 T(A_2) \} \\ e_4 &= \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3 B_1 B_2 B_3}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)} E_g \{ A_1^2 (A_2 - A_3) T(A_1) + A_2^2 (A_3 - A_1) T(A_2) \\ &\quad + A_3^2 (A_1 - A_2) T(A_3) \} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)_b$$

$$\text{但し} \quad B_2 = \frac{R_{12} R_{22}}{R_{12}^2} \quad (5.3.9)$$

にて  $R(A)$  及び  $T(A)$  は (3.1.16)<sub>a</sub> 及び (3.1.16)<sub>b</sub> にて與へられる。尚 (5.3.8)<sub>a</sub> 及び (5.3.8)<sub>b</sub> の方程式は (3.1.14)<sub>a</sub> 及び (3.1.14)<sub>b</sub> と全く同じものであることは注意するに値しない。

次ぎに實際問題として最も重要にして興味ある各段増幅率の定数が相等しく



第 5.3.3 圖



$$\left. \begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 &\equiv \mu \\ B_1 = B_2 = B_3 &\equiv B \\ A_1 = A_2 = A_3 &\equiv A \end{aligned} \right\} \quad (5.3.10)$$

なる場合に対する出力を求めて見よう。今の場合には(4.3.9)<sub>a</sub>及び(4.3.9)<sub>b</sub>式に於て  $A_1, A_2, A_3$  が夫々  $A$  に近づいた極限値として與へられるから

a) 入力が周期的矩形波なる場合

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= -\mu B E_g R(A) \\ e_3 &= \mu^2 B^2 E_g \left\{ R(A) + A \frac{dR(A)}{dA} \right\} = (-\mu B)^2 E_g \frac{d}{dA} \{ A R(A) \} \\ e_4 &= -\frac{\mu^3 B^3}{2} E_g \left\{ 2R(A) + 4A \frac{dR(A)}{dA} + A^2 \frac{d^2 R(A)}{dA^2} \right\} = \frac{(-\mu B)^3}{2} E_g \frac{d^2}{dA^2} \{ A^2 R(A) \} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.11)_a$$

b) 入力が周期的三角波なる場合

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= -\mu B E_g T(A) \\ e_3 &= (-\mu B)^2 E_g \frac{d}{dA} \{ A T(A) \} \\ e_4 &= \frac{(-\mu B)^3}{2} E_g \frac{d^2}{dA^2} \{ A^2 T(A) \} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.11)_b$$

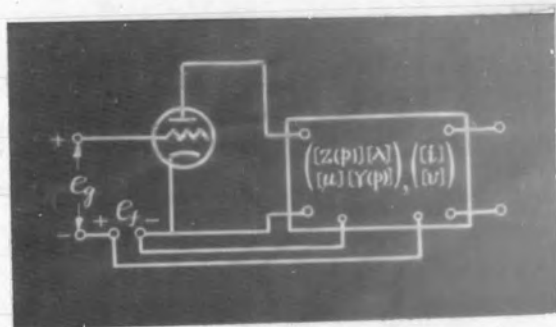
(5.3.11)<sub>a</sub> 及び (5.3.11)<sub>b</sub> が所要の出力を表すものである。<sup>\*</sup>

次に以上の結果に対する数値計算例を示す。即ちオプ・3・3図(a)乃至(f)は回路定数相等しき二段増幅器にて周期的矩形波を増幅せる場合の出力  $\{ (5.3.11)_a \text{ の } e_2 \}$  を示すものである。図中実線は単一孤立入力波に対する出力で、 $m$  は  $t_2/t_1$  の値を示す。オプ・3・3図をオプ・114図と比較検討すれば二段抵抗結合増幅器の周期的矩形波増幅特性として下記の如き諸性質に気付くであらう。

(1) 当然の事であるが同じ  $A$  の値に対する出力の差は一段目の出力より二段目の方が大である。(例へばオプ・114図(a)とオプ・3・3図(b)とを比較)

(2) 或る値の  $A$  に対する一段目の出力と、その半分の値の  $A$  に対する二段目の出力とは略々同じ波形である。換言すれば“或る一定の信号波を一段増幅した場合と二段増幅した場合との出力の差を略々同一にするには後者の  $A$  の値を前者の夫に対して2倍に設計しなければならない。<sup>\*</sup>”此の奥像は  $A$  が1になる場合には極めて良く成立し、 $A$  が“相当大”になつても出力波形の歪曲<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> オプ・114図は之を更に一般の  $m$  段増幅器に就いて論じた。



第 5.4.1 圖

は別とて主要部に対しては充分成立することが分る。(オ3.1.4図(a)(b)(c)とオ5.3.3図(a), (c), (e)とを比較)

(3)  $A_G$ が"ある程度以上大に振れ" ( $A_G$ の値に依って異なるが"凡そ  $A_G > 1$  ならば")  $t = t_0 + 0$  に於ける出力の振幅は  $-1$  より更に飛出し、一方  $A_G$  もある程度以上大に振れ、( $A_G$ の値に依り異なるが"凡そ  $A_G > 1$  ならば")  $t = +0$  に於ける出力の振幅は  $1$  より大となる。(オ5.3.3図(d)  $m=2$  の曲線 同図(e)及び(f)参照) 之の現象は一段目の出力には認められなかった。尚二段目の出力が"±1"より飛出す量及び  $A_G$ ,  $A_G$ ,  $A_G$  との関係は  $\frac{d}{dt} \{AR(A)\}$  に (3.1.16)式を代入することによって解析的に論じ得るか、之のみに深入りしない。

以上は抵抗結合二段増幅器の周期的矩形波入力に対する出力の特性であるが、一般の  $m$  段増幅器に関する検討はオII篇に譲る。

#### 5.4 饋還増幅器の基礎微分方程式

本節ではオ2章の新解析法を饋還増幅器に適用せんとする場合の基礎微分方程式の樹立法に就いて述べる。

オ5.4.1図の如き饋還増幅器を考へ、饋還電圧を  $e_f$ 、信号電圧を  $e_g$  とする。然るに其の回路に対する基礎微分方程式は下記の如くを表すことが出来る。

$$\begin{pmatrix} [Z(D)] & [X] \\ [Y] & [Y(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U] \\ [V] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_g + e_f] \\ [0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_g] \\ [0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [e_f] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (5.4.1)$$

然るに饋還電圧を要素とする行列  $[e_f]$  は

$$\begin{pmatrix} [e_f] \\ [0] \end{pmatrix} = [Y] \begin{pmatrix} [U] \\ [V] \end{pmatrix} \quad (5.4.2)$$

と表し得べき行列  $[Y]$  が常に存在し、一般に次の形で表される。

$$[Y] = \begin{pmatrix} [Z'(D)] & [X'] \\ [0] & [0] \end{pmatrix} \quad (5.4.3)$$

茲に  $[Z'(D)]$  は  $Z'_{ij} = L'_{ij} D + R'_{ij}$  を要素とする行列にて  $[X']$  は単なる数を要素とする行列である。(5.4.3)式の  $[Y]$  なる行列は饋還の性質を決定するものにて之を饋還行列と呼称する。然して之は一般に (5.4.2) なる関係より視察に依り容易に決定し得るものである。

扱て (5.4.2) 及び (5.3.3) 式を (5.4.1) 式に代入する時は

$$\begin{pmatrix} [Z(D) - Z'(D)] [\lambda - \lambda'] \\ [\mu] \quad [Y(D)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u] \\ [v] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_g] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (5.4.4)$$

上式が(2.1.1)式に対応するべき今の場合の基礎微分方程式であつて、両者を比較すれば

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} [Z(D)] [\lambda] \\ [\mu] [Y(D)] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} [Z(D) - Z'(D)] [\lambda - \lambda'] \\ [\mu] \quad [Y(D)] \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} [e(t)] \\ [\lambda(t)] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} [e_g] \\ [0] \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.5)$$

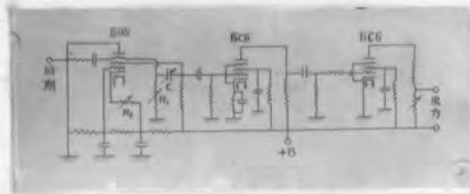
なる関係を得る。一方(2.1.3)式中の  $\begin{pmatrix} [L] [0] \\ [0] [C] \end{pmatrix}$  なる値は明らかに

$$\begin{pmatrix} [L] [0] \\ [0] [C] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L - L'] [0] \\ [0] [C] \end{pmatrix} \quad (5.4.6)$$

以上(5.4.5)及び(5.4.6)の関係を利用すれば以下第2章の所論を其の儘適用出来る筈である。例へば“饋還増幅器の安定問題”に就いては2.2に言論した處に従へば”

$$\delta \begin{pmatrix} [Z(p) - Z'(p)] [\lambda - \lambda'] \\ [\mu] \quad [Y(p)] \end{pmatrix} = 0 \quad (5.4.7)$$

を満足する  $p$  の根の実数部が凡て負であれば“良く之には Hurwitz の判定法<sup>(2)</sup>”を使用するのが“便であらう。



第 6·1·1 圖



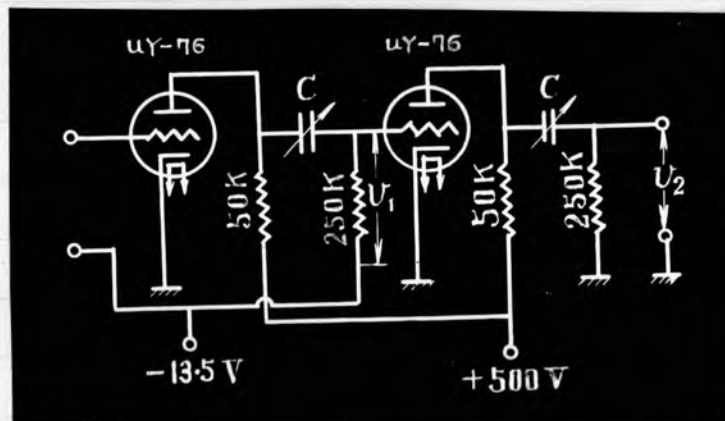
(a)  $t_1 = t_2$



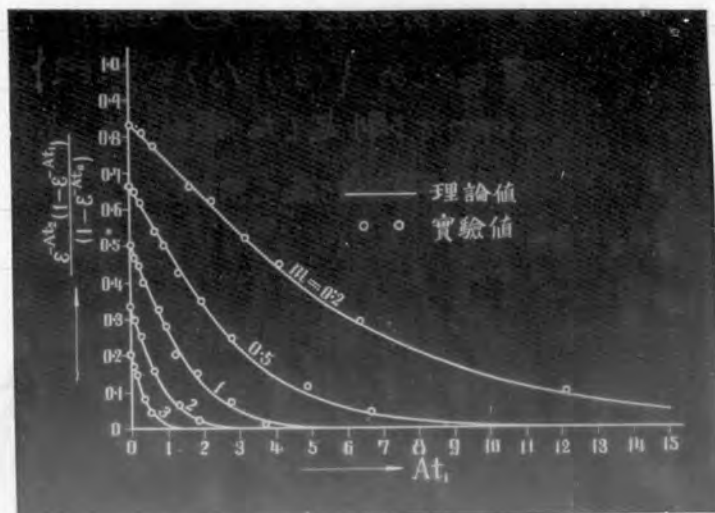
(b)  $2t_1 = t_2$

$$(t_1 + t_2 = t_0 = 1/500 \text{ 秒})$$

第 6·1·2 圖



第 6·1·3 圖



第 6·1·4 圖



## 第6章 実験的考察

### 6.1 抵抗結合増幅器に関する検討

第3章の所論に従へば各低周波増幅器の周期波増幅特性は凡て抵抗結合増幅器の夫を基本的特性として有し、之を適当に組合せることに依つて組立て得る。斯様な意味から茲には抵抗結合1段及び2段増幅器の周期波増幅特性を周期的矩形波信号に就て二三の実験を行ひ以上の解析結果と比較して見た。

入力する周期的矩形波の発生回路はオ6.1.1図に示すが、<sup>(2)</sup> 本極値の負性コンダクタスを利用せる矩形波発振器を利用し、 $R_2$ 及び $R_1-C$ を変化することに依つて矩形波の幅及び周期を変化せしめ、得られた矩形波を増幅し、同時に真空管の遮断特性を利用して矩形波の上下を切り取り、その波形を充分良好ならしめたもので、その出力波形はオ6.1.2図に如きである。

一方実験に供した増幅器はオ6.1.3図の如くて、1段目及び2段目の出力について検討した。尚入力の変遷し周期は500 $\mu$ とした。

#### (A) 出力波形の零電位の浮動に関する検討

1段目の出力に於て信号が周期的なるか否かに依つて生ずる出力波形の相違の内最も大なる影響を有するものは零電位の浮動で、その大きさは(3.1.16)式右辺の最後の項  $e^{-At_0}(1-e^{-At_0})/(1-e^{-At_0})$  に依つて決定され、然して之は(3.1.16)式に於て  $t=t_0$  と置けば得られることは前述せる通りである。従つて定常出力の各周期の終末値が之である。

実験は入力を一定に保ち( $t_0, t_1, t_2$ を一定)結合用のコンデンサー  $C$  の値を変化することに依つて  $A$  を可変ならしめ、{(3.1.15)式参照} 出力の各周期に於ける終末値をブラウン管に依つて測定した値がオ6.1.4図の小図にて示されてゐる。実験線はオ6.1.4図の理論値を示すもので両者は良く一致してゐる。

#### (B) 出力波形に関する検討

前と同様  $C$  の値を変化して得られる種々の  $A$  値に対する出力波形のオシログラムを示したものがオ6.1.5図及びオ6.1.6図である。然してオ6.1.5図は  $t_2/t_1=2$  の場合のおて  $v_1$  は1段目の出力を  $v_2$  は2段目の出力を示す。尚此等のオシログラムを逆にすれば  $t_2/t_1=0.5$  なる場合の出力を映へることは云ふ迄もない。勿論この場合は各オシログラムの  $A$  値の値を2倍にしなけりばならない。一方

$V_1$  $V_2$ 

$C = 0.05 \mu F$   
 $At_1 = 0.0518$



$C = 0.1 \mu F$   
 $At_1 = 0.0259$



$C = 0.05 \mu F$   
 $At_1 = 0.0518$



$C = 0.01 \mu F$   
 $At_1 = 0.259$



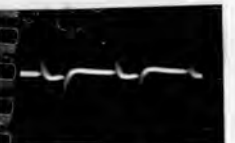
$C = 0.004 \mu F$   
 $At_1 = 0.647$



$C = 0.002 \mu F$   
 $At_1 = 1.29$



$C = 0.001 \mu F$   
 $At_1 = 2.59$



$C = 0.0005 \mu F$   
 $At_1 = 5.18$



$C = 0.0002 \mu F$   
 $At_1 = 12.9$

第 6.1.5 圖

 $V_1$  $V_2$ 

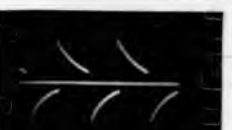
$C = 0.05 \mu F$   
 $At_1 = 0.0776$



$C = 0.01 \mu F$   
 $At_1 = 0.388$



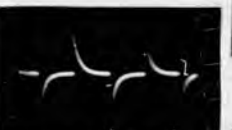
$C = 0.004 \mu F$   
 $At_1 = 0.969$



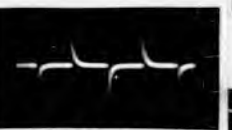
$C = 0.002 \mu F$   
 $At_1 = 1.94$



$C = 0.001 \mu F$   
 $At_1 = 3.88$



$C = 0.0005 \mu F$   
 $At_1 = 7.75$



$C = 0.0002 \mu F$   
 $At_1 = 19.4$



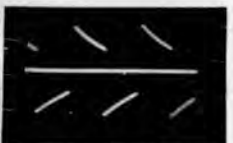
$C = 0.1 \mu F$   
 $At_1 = 0.0388$



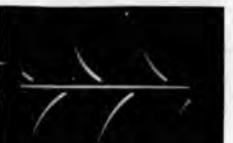
$C = 0.05 \mu F$   
 $At_1 = 0.0776$



$C = 0.02 \mu F$   
 $At_1 = 0.194$



$C = 0.01 \mu F$   
 $At_1 = 0.388$



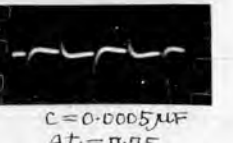
$C = 0.004 \mu F$   
 $At_1 = 0.969$



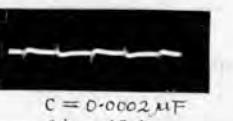
$C = 0.002 \mu F$   
 $At_1 = 1.94$



$C = 0.001 \mu F$   
 $At_1 = 3.88$



$C = 0.0005 \mu F$   
 $At_1 = 7.75$



$C = 0.0002 \mu F$   
 $At_1 = 19.4$

第 6.1.6 圖

オ6.1.6図は同じく1段目の出力 $v_1$ 及び2段目の出力 $v_2$ を $v_1/v_2=1$ なる場合に示す。  
尚之等両図のオシログラム中に水平に入れた直線は零電位を示す。

之等のオシログラムを解析結果と対照すれば次の諸事項が分る。

- (1) 之等のオシログラムはオ3.1.4図及びオ5.1.3.3図の理論的<sup>計算</sup>結果と極めてよく一致してゐる。
  - (2) 本節(A)に述べた出力の各周期の終末値の様子が極めて明瞭に看取され1段目の出力は $A_G$ 及び周期の値如何に拘らず"前の値を取る"2段目の出力に於ては $A_G$ の値が大なる場合には正になることが分る。之れ既に解析的に指適せるところである。
  - (3) 或る値の $A_G$ に対応する1段目の出力はその半分の値の $A_G$ に対する1段目の出力と極めて良く一致するとの解析結果がオシログラムの上にも明かに看取される。
  - (4)  $A_G$ の小さな場合の2段目の出力が1段目の末に於て $t=t_1+0$ 及び $t=t_2+0$ に於ける立上りの傾斜が多少緩やかなのは3.1[B]に論じた真空管の内部容量その他の微小容量の影響と思惟される。一方 $A_G$ が極めて大なる場合の出力特に2段目の出力に於て $A_G$ が大なる程出力の大きさが減小するもの之が影響に係るものと考へられる。
- 尚以上[A]及び[B]の結果よりするに、解析に際して設けた真空管特性が直線であるとの仮定は今の場合の実験に於ては何等差支へない様で、特に真空管特性の非直線性に起因する様な現象は認められない。

## 6.2 単一同調回路増幅器の周期的矩形変調波入力に対する出力波形の検討

オ6.2.1図は試験に用いた回路で50K.C.の水晶発振器にて連続な搬送波を作り、之れを前節の実験に用いた矩形波発振器にて得られた $t_1=t_2=0.5\text{ms.}$ なる矩形波にて衝撃的に変調し信号波とした。オ6.2.2図はオ6.2.1図の $C$ を変化することによって得られた同調時及び離調時の出力波形を示すオシログラムで、 $\Delta\omega$ は(4.1.3)式の夫と同じ意味で搬送波の角周波数 $\omega$ とLC回路の固有周波数 $\beta$ との差である。尚実験の回路の $Q$ は(4.1.43)式の $Q$ の値は約54であつた。

扱て今の場合搬送波は各衝撃波を通じて連続であるが、 $\omega_1$ 及び $\omega_2$ の正確な値(少くとも少数位以下=桁位迄の値)を測定することは困難であるがオ2編第章の所論に従へば次の事が云へる。即ち搬送波が各衝撃波を通じて

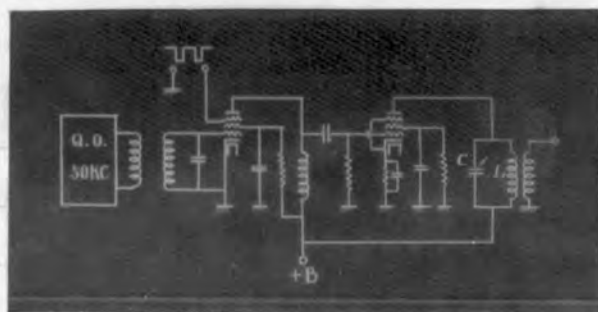
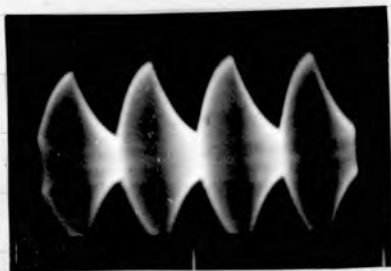
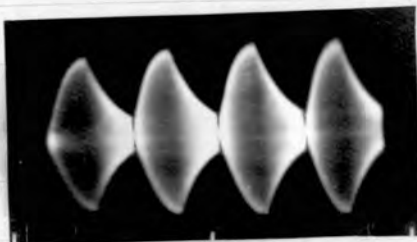


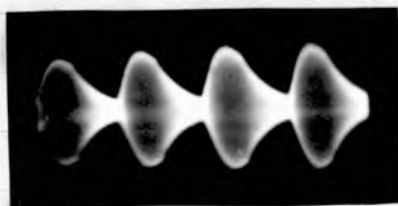
图 6.2.1



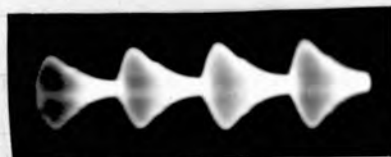
(a)  $\Delta\omega t_1 = 0$



(b)  $\Delta\omega t_1 = 0.75\pi$



(c)  $\Delta\omega t_1 = 1.5\pi$



(d)  $\Delta\omega t_1 = 2\pi$



(e)  $\Delta\omega t_1 = 3\pi$



(f)  $\Delta\omega t_1 = 4\pi$



(g)  $\Delta\omega t_1 = 6\pi$

$$t_1 = t_2$$

图 6.2.2

連続なる場合の出力の包絡線は  $\Delta\omega t$  及び  $\omega t$  の値に依つて決定され  $\omega t$  及び  $\omega t$  の値には無関係であることが分つてゐる\*。従つて以上のオシログラムは  $\omega t = 2.3$  図及び  $\omega t = 4.2, 4$  図に於て拍發送波が各周期を通じて連続なる場合即ち  $\omega t = 2m\pi$  なる場合の出力波形と対等である。即ち  $\omega t = 2.3$  図 (a) 及び  $\omega t = 4.2$  図の曲線のみが今の実験結果より検討し得可き対照である。今之等の実験結果と解析結果とを比較すれば、

- (1) 同調時には包絡線は指數函数的に單調な変化をなし、
- (2) 離調にて行くにつれて包絡線の前面が円形化し、
- (3) 更に離調が大になると凹凸が出来、その数は大略  $\Delta\omega t/\pi$  に等しくなり、
- (4) 信号休止時には指數函数的に單調に減衰する。

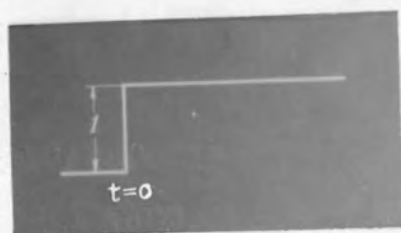
との解析結果がオシログラムにその儘看取される。のみならず  $\omega t = 4.2, 4$  図の曲線の示す如く  $\Delta\omega t$  が  $\pi$  或は  $\pi$  の奇数倍の値の近傍に於て拍發送波印加直後に包絡線は一度零となり波形がクビレることを述べたが  $\omega t = 2.3$  図 (b) のオシログラムがその状態を示してゐる。

\* 99頁(カII編2.5)参照

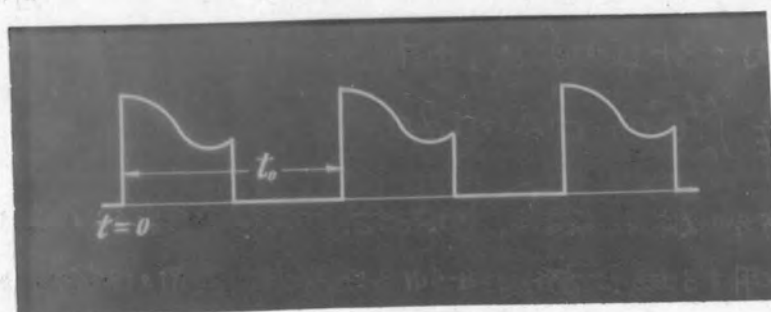


## [参考文献]

- (1) 林・近藤：電評に投稿中，昭和22年11月電気学会関西支部聯合講演会に於て講演
- (2) Frazer, Duncan & Collar: Elementary Matrices (1938) P.70
- (3) 林：電評 30巻 537頁 (昭17)
- (4) 藤原：行列及び行列式 (岩波) 178頁
- (5) 林・近藤：電評 33巻 4頁及び41頁 (昭20)
- (6) 林：電評 28巻及び29巻 (昭15-10～昭16-4)
- (7) 林：電学誌 63巻 896頁 (昭18)
- (8) 林：電学誌 62巻 613頁 (昭17)
- (9) 林：第22回聯合大会予稿 4頁 (昭18)
- (10) 林：演算子法と断続回路 (大化書房)
- (11) 川上：電通誌 28巻 3頁 (昭19)
- (12) Hurwitz: Ann. der Math. Bd. 46 S. 273 (1895)
- (13) (4)の208頁
- (14) (4)の213頁
- (15) 林・近藤：電評 34巻 129頁 (昭21)
- (16) 林・近藤：電評に投稿中
- (17) C.W. Oateley: Wireless Eng. vol. 8 p. 244 & 307 (1931)
- (18) 林・近藤：電評に投稿中
- (19) 森脇：日本電気研究季報 第1巻 1号 (昭16-7)
- (20) 林・近藤：電評に投稿中
- (21) 小林・大沢・藩：第4回日本工学大会電気部会予稿(8) 48 (昭15-4)



第 1·1·1 圖



第 1·1·2 圖

## 第Ⅱ編 周期力に対する新相乗定理に係る研究

### 第1章 任意の周期力に依つて他周波回路に誘起せられる 過渡並びに定常現象の一般的解析法<sup>(1),(2)</sup>

#### 1.1 任意の周期的衝撃波に依つて誘起せられる過渡並びに定常現象の一般的解析法

所謂単位函数入力  $H(t)$  (オ1.1.1 図) に対する応答力 (Response) が  $A(t)$  にて表へられるものとするは、時間的に任意の変化をなす入力  $e(t)$  が加へられた時の応答力は所謂相乗定理に依つて次式で計算することが出来る。

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.1.1)$$

従つてオ1.1.2 図に示すか如く、或る任意の波形を有する衝撃波が、なる周期を以て断続的且つ周期的に作用する場合誘起せられる現象は 図示の波形全体を  $e(t)$  と考へれば、(1.1.1) 式に依つて求むる事が出来る。然し乍ら此の場合の時間の原点は勿論現象始動の瞬間、換言すれば  $e(t)$  の作用し始める最初の瞬間にある爲、定常現象 ( $t \rightarrow \infty$  に対応する) 或は、現象始動時より相当の時間経過せる後に於ける過渡現象を知らんとせば、 $e(t)$  がオ1.1.2 図の如く周期的なる爲 (1.1.1) 式に依つて得られる解は無限級数 (定常現象に対して) の形式を取るが、<sup>(3)</sup> 然らざる場合に在つても解を構成する項の数が多くなり、上述の如き過渡現象に対して之れに数値計算を施行して波形を描かせんとするのには多大の不便を感じる次第である。一方図式的に示しを求めとする<sup>(4)</sup> 場合には、時間も長くなるにつれて、それに要する手数は極めて大となりその弊に耐へ得ない。

以下述べんとする解析法は其の欠点を除き、定常現象たると過渡現象たるとを問はず、相乗時間を駆動力の周期とならしめ、所望の解が何れも有限箇の初等函数の集合を以て表現せられるか如きものである。然るに上述せる如く相乗時間が一周期となる爲 図式計算も亦極めて簡単となり、入力が図式的に表へられた様な場合甚だ便利かと思ふ。

又オ1.1.3 図 (a) に示すか如く、或る函数  $f(t)$  の  $0 \leq t \leq T$  なる区間のみを切取つた衝撃波がなる周期を以て断続的に作用する場合を考へる。但し此の場合  $T < 0$  及

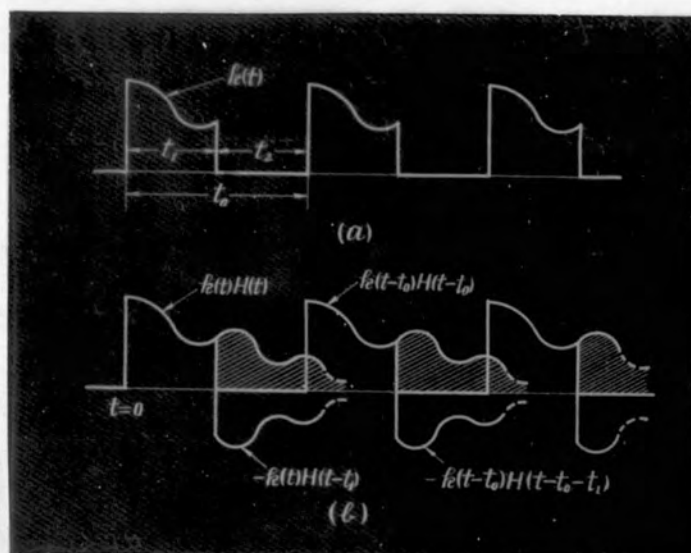


圖 1.1.3

は " $t > t_0$  に対して  $k(t)$  は如何なる値を取るも差支へない。斯る衝撃波は同図 (b) に示すか如く下記の如き正波及び負波より成る 2 つの列に分解する事が出来る。

- (1)  $t < g t_0$  に対しては零で  $t > g t_0$  に対して  $k(t - g t_0)$  なる正波 (但し  $g = 0, 1, 2, \dots$ )  
 (2)  $t < g t_0 + t_1$  に対しては零で  $t > g t_0 + t_1$  に対して  $-k(t - g t_0)$  なる負波 (但し  $g = 0, 1, 2, \dots$ )  
 或は更に所謂単位跳躍函数  $H(t)$  を用ふれば "次の如くに表現することも出来る。

$$\begin{aligned} \text{(1) 正波} \quad e_{p,g}(t) &= k(t - g t_0) H(t - g t_0) \\ \text{(2) 負波} \quad e_{n,g}(t) &= -k(t - g t_0) H(t - g t_0 - t_1) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (g = 0, 1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad (1.1.2)$$

假令入力  $k$  が単位跳躍函数  $H(t)$  なる時の出力を  $A(t)$  とせば、上式の  $e_{p,g}(t)$  に依つて誘起される現象は (1.1.1) 式に依り

$$f_{p,g}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e_{p,g}(t - \tau) A(\tau) d\tau \quad (1.1.3)$$

にて算定せられる。然るに  $e_{p,g}(t)$  は (1.1.2) 式に示すか如く波動性を有する為林重憲教授の拡張せられた相乗定理<sup>(5)</sup>に依り (1.1.3) 式は

$$f_{p,g}(t) = \begin{cases} 0 & t < g t_0 \\ \frac{d}{dt} \int_0^{t - g t_0} k(t - \tau - g t_0) A(\tau) d\tau & t > g t_0 \end{cases} \quad (1.1.3)'$$

となる。或は更に簡単に

$$f_{p,g}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{t - g t_0} k(t - \tau - g t_0) A(\tau) H(\tau) d\tau \quad (1.1.4)_a$$

と表す事が出来る。

同様に  $e_{n,g}(t)$  に依つて誘起せられる現象は

$$f_{n,g}(t) = -\frac{d}{dt} \int_0^{t - g t_0 - t_1} k(t - \tau - g t_0) A(\tau) H(\tau) d\tau \quad (1.1.4)_b$$

にて表へられる。

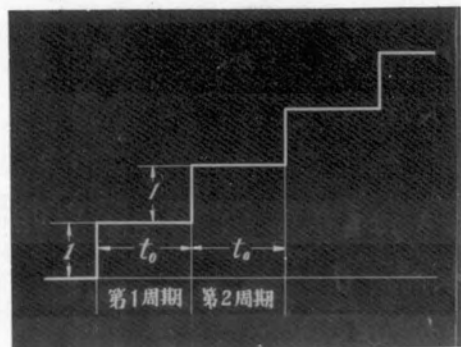
従つて上記正負一対の入力波  $e_{p,g}(t)$  及び  $e_{n,g}(t)$  に依つて誘起せられる現象は (1.1.4)<sub>a</sub> 及び (1.1.4)<sub>b</sub> より

$$\begin{aligned} f_g(t) &= f_{p,g}(t) + f_{n,g}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{t - g t_0 - t_1}^{t - g t_0} k(t - \tau - g t_0) A(\tau) H(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

にて表へられる。

然るに上式中の  $\tau$  は積分の補助変数なるを以て、之れを如何様に変換するも差支へ無き故





第 1 · 1 · 4 圖

$$\xi t_0 + \tau = \xi$$

(1.1.6)

なる関係式に依り  $\tau$  を  $\xi$  に変換すると

$$f_g(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t R(t-\xi) A(\xi - g t_0) H(\xi - g t_0) d\xi \quad (1.1.7)$$

従つて、 $g$  周期目の過渡現象、換言すれば、時間  $t$  が  $(n-1)t_0 \leq t \leq n t_0$  なる期間に発生すべき過渡現象は明かに次式を以て算定する事が出来る。

$$\begin{aligned} \bar{F}_n(t) &= \sum_{g=0}^{n-1} f_g(t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t R(t-\xi) [A(\xi) + A(\xi - t_0) + \cdots + A\{\xi - (n-2)t_0\} \\ &\quad + A\{\xi - (n-1)t_0\} H\{\xi - (n-1)t_0\}] d\xi \quad (1.1.8) \end{aligned}$$

上式の時間  $t$  の原点は三つ異なる、 $g$  周期目の初期、即ち現象全体の始動の瞬間にある。今之を  $g$  周期目の初期に移す事に依り得られる時間座標を  $t'$  とせば、

$$t' = t - (n-1)t_0 \quad (1.1.9)$$

なる関係がある。斯る時間座標の変換に応じて、積分の爲の補助変数  $\tau$  も亦同時に

$$\xi = (n-1)t_0 + \tau \quad (1.1.10)$$

なる関係式に依り定義された  $\tau$  に変換する時は (1.1.8) 式は

$$\bar{F}_n(t') = \frac{d}{dt} \int_{t'-t_1}^t R(t'-\tau) S_n(\tau) d\tau$$

若しに

$$S_n(\tau) = A\{\tau + (n-1)t_0\} + A\{\tau + (n-2)t_0\} + \cdots + A(\tau + t_0) + A(\tau) H(\tau) \quad (1.1.11)$$

或は  $\bar{F}_n(t')$  は  $t'$  の代りに改めて  $t$  と書けば

$$\bar{F}_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t R(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (1.1.12)$$

之れが 1.1.3 図 (a) に示すが如き任意の波形を有つ周期的衝撃波に依り誘起せらるる  $g$  周期目の過渡現象の一般算定公式にて、時間  $t$  の原点は  $g$  周期目の初期に選定しある事上述せるが如くである。

次に  $S_n(\tau)$  の物理的意味を考察するに、 $S_n(\tau)$  は (1.1.11) 式より明かた如く、1.1.4 図に示すが如き  $t_0$  なる時間間隔を以て階段的に単位量づゝ飛躍するか如き入力に対する  $g$  段階目の現象を時間変数  $\tau$  の原点を  $g$  段階目の初期に取って表はしたものである。

尚(1.1.12)と(1.1.1)式と比較すれば明らかなる如く、 $S_n(\omega)$ は(1.1.1)式の $A(\omega)$ に対応するもので、 $S_n(\omega)$ は周波力の解析に際し出現する量なるを以て、以下その元に応じて、“周期的過渡インディシャルアドミッタンス”或は“周期的過渡インディシャルインピーダンス”等と呼称する事としよう。

然るに一般の常数係数線型回路に在つては、 $A(\omega)$ は通常常数並びに指数函数の集合を以て表現せらる可き性質のもので、(1.1.1)式の級数は一般に等比級数となるを以て衆知の公式に依り、 $A(\omega)$ が與へられれば直ちに求むべき量で、それが如何程大なる値を取るも $S_n(\omega)$ は少数の項の集合にて表現せられ、(1.1.12)式に依り算定せらる可き所要の $F_n(t)$ 中に含まれる項の数も亦少数に止り、之が數値計算を施行して波形を描出するのに極めて便利である。一方 $S_n(\omega)$ は $A(\omega)$ が“圖式的に既知なる場合には(1.1.1)式に依り容易に圖式的に求め得るから、(1.1.2)式の計算を圖式的に行つて良い。 $A(\omega)$ が圖式的に與へられた場合も全く同様である。然るに(1.1.12)式に依れば“ $\omega$ 及び $t$ の値の如何に拘らず、 $\omega$ の变化領域は常に与ふる故、その手数は(1.1.1)式に依る夫に比して比較に甚だ程軽減される。

次に定常状態の解は(1.1.12)より

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t k(t-\tau) S(\omega) d\tau \quad (1.1.13)$$

茲に

$$S(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = A(\omega)H(\omega) + A(\omega + t_0) + \dots + A(\omega + 2t_0) + \dots \quad (1.1.14)^*$$

然して $S(\omega)$ は云ふ迄もなくヤトリ4圖の如き階段状の入力に対応する定常出力で、一般には無限等比級数の形式を取るが故に衆知の公式に依り、直ちに求むる事が出来、過渡状態の解析に際して本解析法が有つてゐた上述の諸利便は、定常状態の解析に対しても失はれるものではない。

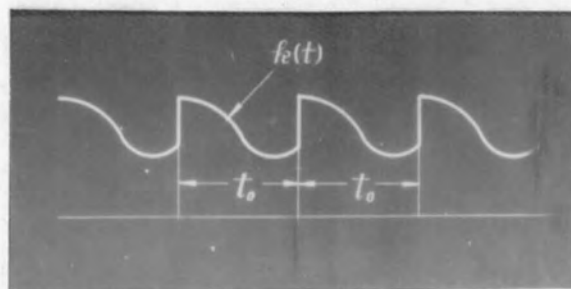
## 1.2 種々なる一般的周期力に依つて誘起される過渡並びに定常現象の解析法

前節の結果を利用すれば種々性質を異にする任意波形を有する周期力に依つて誘起される諸現象を簡単に解析する事が出来る。

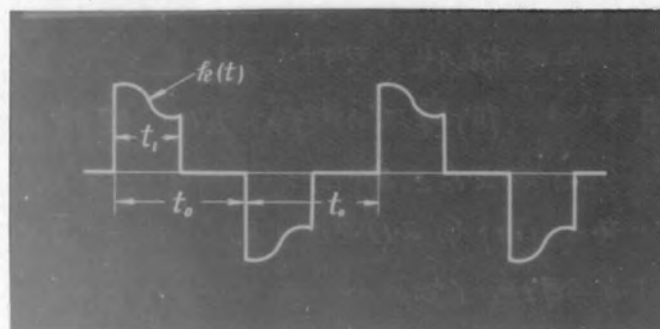
### (1) 一般反覆力の解析

ヤトリ4圖に示す如き一般反覆力に依つて誘起される過渡並びに定常現象は(1.1.12)或は(1.1.13)式に於て $t=t_0$ と考へれば“良いから

\*  $A(\omega)$ が常数を含む場合には $S(\omega)$ は発散するが斯る場合に就ては1.3参照の事



第 1 · 2 · 1 圖



第 1 · 2 · 2 圖

過渡状態に対しては

$$F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t k(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (1.2.1)$$

定常状態に対しては

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t k(t-\tau) S(\tau) d\tau \quad (1.2.2)$$

となる。然して  $S_n(\tau)$  及び  $S(\tau)$  は夫々 (1.1.11) 及び (1.1.14) 式にて表へらるものさ其の儘採用する可きは云ふ迄もない。

## (2) 一般周期的交番衝撃波の解析

や1.2.2図に示すか如く、交互に極性の反対なる任意波形の衝撃波に依つて誘起せらる現象の解析法を考へる。衝撃波の波形を  $k(t)$ 、経緯時間を  $\tau$ 、周期を  $t_0$  とすること図示の如くとする。然る時  $t_0$  を新たに一周期と考へ、その間の正負一対の衝撃波全般を  $k(t)$  と考へれば、(1.2.1) 及び (1.2.2) 式が適用出来る筈であるが、斯る方法にては、相対時間領域 ( $\tau$  の領域) は  $t_0$  となる。今若し、 $t_0$  を一周期と考へ相対時間領域を  $t$  ならしむる事が出来れば、特に図式計算に於て便利となる。以下斯る目的に適合せる一般公式を誘導しよう。

簡單の爲に一番始めに到来せる衝撃波の極性を正と仮定し、 $t_0$  を以て一周期と呼称す。先づ時間座標  $t$  の原点を  $t_0$  初期の初期に設定し、 $l$  を偶数と仮定すれば、や  $(l+1)$  周期目に到来せる正衝撃波 及び や  $(l+2)$  周期目に到来せる負衝撃波に依つて誘起せらる現象は、(1.1.5) 式に依り夫々次式を以て算定せらる。

正衝撃波に依る現象:

$$f_l(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_l-t_0}^{t-t_l} k(t-\tau-lt_0) A(\tau) H(\tau) d\tau$$

負衝撃波に依る現象:

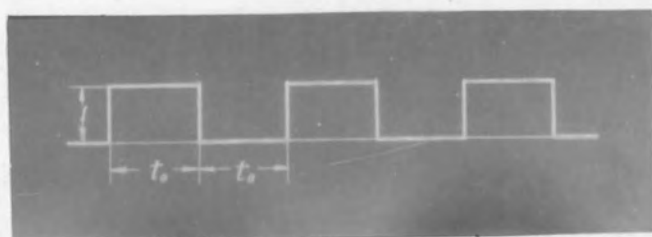
$$f_{lH}(t) = -\frac{d}{dt} \int_{t-t_l-(l+1)t_0}^{t-t_l-lt_0} k(t-\tau-lt_0) A(\tau) H(\tau) d\tau$$

(1.2.3)

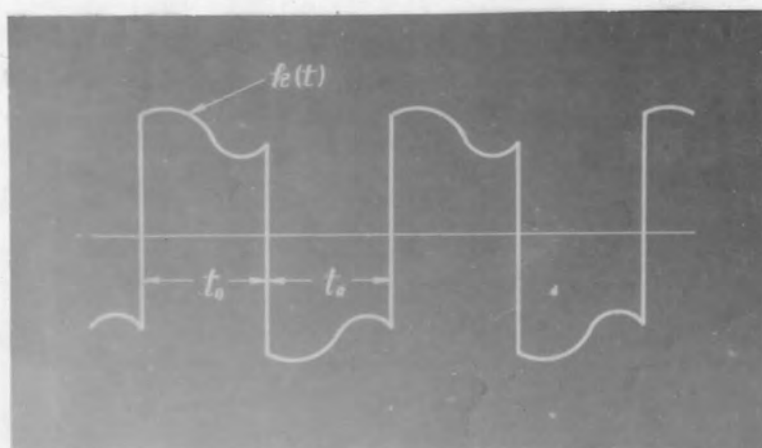
或は  $q$  を任意の正の整数とすれば、一般にや  $q+1$  周期目に入来せる衝撃波に依つて誘起せらる現象も、衝撃波の極性をも考慮に入れて次の如く表す事が出来る。

$$f_q(t) = (-1)^q \frac{d}{dt} \int_{t-t_q-t_0}^{t-t_q} k(t-\tau-qt_0) A(\tau) H(\tau) d\tau \quad (1.2.3)'$$





第 1 · 2 · 3 圖



第 1 · 2 · 4 圖

或は上式に於て積分の爲の補助変数 $\xi$ を

$$\xi = t_0 + \tau$$

なる関係式に依り $\tau$ に変換すれば、

$$f_g(t) = (-1)^g \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\xi) A(\xi - \xi_0) H(\xi - \xi_0) d\xi \quad (1.2.4)$$

従つて所要の $n$ 周期目の過渡現象は

$$F_n(t) = \sum_{g=0}^{n-1} f_g(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\xi) \left[ \sum_{g=0}^{n-1} (-1)^g A(\xi - \xi_0) + (-1)^{n-1} A(\xi - (n-1)t_0) H(\xi - (n-1)t_0) \right] d\xi \quad (1.2.5)$$

次ぎに前節に於けると同様、第1周期目の初期に遷んだ<sup>\*</sup>時間の原点を $n$ 周期目の初期に移すと共に、それに依りて

$$\xi = (n-1)t_0 + \tau$$

なる関係式に依り $\tau$ を $\tau$ に変換すれば、

$$F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (1.2.6)$$

茲に

$$S_n(\tau) = A\{(n-1)t_0 + \tau\} - A\{(n-2)t_0 + \tau\} + \dots + (-1)^{n-1} A(t_0 + \tau) + (-1)^n A(\tau) H(\tau) \quad (1.2.7)$$

となる。之れ所要の公式である。

さて、(1.2.6)は(1.1.2)式と全く同一の形式であるが、今の場合には $S_n(\tau)$ は(1.1.11)と異り(1.2.7)に依つて與へられる事が相異してゐる。然して(1.2.7)式より明かな如く、今の場合の $S_n(\tau)$ は、<sup>\*</sup>図1.2.3に示す如く、経路時間及び休止時間が共に $t_0$ に等しい周期的矩形波入力に対する $n$ 周期目の過渡出力を、 $n$ 周期目の初期に時間座標 $\tau$ の原点を取つて表はしたものである。

尚定常状態に対しては

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\tau) S(\tau) d\tau \quad (1.2.8)$$

茲に

$$S(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\tau) \quad (1.2.9)$$

にて算定せらるべき事は今更説明する迄もない。

### (3) 周期的交替反覆力の解析

入力が<sup>\*</sup>図1.2.4に示す如く極性が交互に反対なる反覆力なる場合の出力は、  
\*  $t_0$ を一周期と考へて $n$ 周期目の意である。

図示の  $t_0$  を一周期と考へ、 $n$  周期目の入力波の極性を正と仮定すれば、前記 (1.2.6) 及び (1.2.8) に於て  $t = t_0$  と置けば良いから、 $n$  周期目の過渡出力は

$$F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t k(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (1.2.10)$$

定常出力は

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t k(t-\tau) S(\tau) d\tau \quad (1.2.11)$$

なる式にて算定せられる。但し  $S_n(\tau)$  及び  $S(\tau)$  は夫々 (1.2.7) 及び (1.2.9) にて與へられる事は言ふ迄でない。

### 1.3 新解析法の適用に際し注意すべき事項

以上種々なる性質の周期力に依つて誘起する諸現象の解析法に就いて述べたが、該解析法の實際的適用に際し注意すべきニ三の事項を若慮心乍ら参考までに述べて置かう。

以上二節に亘つて説述せる處に依れば、周期力の性質の如何に拘らず一般に以下の形式を以て所要の解を得る事が出来る。即ち過渡現象に対しては

$$F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (1.3.1)$$

定常現象に対しては

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (1.3.2)$$

$$S(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\tau) \quad (1.3.3)$$

にて  $T$  は常數である。又  $S_n(\tau)$  は周期力の性質に依じて (1.1.11) 或は (1.2.7) の何れかの形式に依つて與へられる。

[注意. 1]  $A(\tau)$  が  $\tau$  に無関係な常數項  $a$  を含み  $S_n(\tau)$  が (1.1.11) にて與へられる場合には一般に

$$S_n(\tau) = (n-1)a + aH(\tau) + G_n(\tau) \quad (1.3.4)$$

となる。但し  $G_n(\tau)$  は常數を含まぬ或る  $\tau$  の函數である。其の場合には (1.3.3) 式より明白な如く  $S(\tau)$  は発散する。然し乍ら (1.3.4) 式を (1.1.11) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} F_n(t) &= (n-1)a \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) S'_n(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) S'_n(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

$$S'_n(\tau) = aH(\tau) + G_n(\tau) \quad (1.3.6)$$

となり、 $S_n(\tau)$  の代りに  $S_n(\tau)$  の常數項を消略せる値  $S'_n(\tau)$  を用ひて差支へない。

従って定常状態の一般算定公式は

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) S'(\tau) d\tau \quad (1.3.7)$$

$$S'(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n'(\tau) \quad (1.3.8)$$

となり、 $A(\tau)$ の常数項に起因する発散を避ける事が出来る。

[注意 2]  $S_n(\tau)$ が (1.1.1) 或いは (1.2.7) の何れかの形式を取るも常に  $A(\tau)H(\tau)$ なる項を含むが故に一般に

$$S_n(\tau) = Q_n(\tau) + A(\tau)H(\tau) \quad (1.3.9)$$

と置くことが出来る。但し  $Q_n(\tau)$ は  $H(\tau)$ を含まぬ  $\tau$ の函数である。従って上式を (1.3.1) 式に代入すれば

$$F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) Q_n(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) A(\tau) H(\tau) d\tau \quad (1.3.10)$$

となる。従って若し時間  $t$  が、 $0 < t < T$  なる範囲におれば、上式の積分の下限は負の値となる。換言すれば、 $\tau$ の令領域が負の範囲に及ぶことになる。然るに  $\tau < 0$  に対しては、 $H(\tau) = 0$  なるを以て、斯る  $\tau$ の値に対しては

$$F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) Q_n(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.3.11)$$

一方  $T < t < t_0$  に対しては常に  $\tau < 0$  であり  $H(\tau) = 1$  なるを以て

$$F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) Q_n(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.3.12)$$

に依つて算定せらる。従って  $0 < t < t_0$  なるすべての  $t$  の値に対して通用可能な式を得んが爲には

$$F_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) Q_n(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau) A(\tau) d\tau - H(t-T) \frac{d}{dt} \int_0^{t-T} k(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.3.13)$$

なる式にて計算を行ふ必要がある。然に上式の右辺の2項及び3項はそれぞれ周期目に入來せる入力波に依つて誘起せられた現象を表し、1項はそれ以前に入來せる入力波に依つて誘起せる現象の残響分を表すものである。尚定常現象の解析に就いても同様である。

以上は文字式に依る計算を行ふ場合の注意であつて圖式計算にはその必要を認めない。

[注意 3]  $k(t)$  は屢述せるが如く、周期的入力の  $0 < t < T$  なる区間の波形を

表せば充分で、 $t < 0$  及び  $t > T$  なる区間に対しては、その函数形は如何なるものであつても差支へない。然し後述の式2.5.1表に示すか如く  $k(t)$  は一般に波動性を有する函数の組合せとして表はされる場合が多い。其の場合と雖も四式計算の施行に當つては何等特別の考慮を必要としないが、文字式の計算に際しては多少の注意を要する。即ち今  $k(t)$  が

$$k(t) = \begin{cases} 0 & t < T_1 \\ k_1(t) & t > T_1 \end{cases} \quad (但し T_1 < T) \quad (1.3.14)$$

$$\text{従つて } k(t) = k_1(t)H(t-T) \quad (1.3.14)'$$

にて與へられると仮定すれば、(1.3.13) 右辺の各項は次の如くになる\*。

式2項：—

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau) A(\tau) d\tau &= \begin{cases} 0 & t < T_1 \\ \frac{d}{dt} \int_0^{t-T_1} k_1(t-\tau) A(\tau) d\tau & t > T_1 \end{cases} \\ &= H(t-T_1) \frac{d}{dt} \int_0^{t-T_1} k_1(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.3.15) \end{aligned}$$

一方  $T_1 < T$  なるに依り

式3項：—

$$H(t-T) \frac{d}{dt} \int_0^{t-T} k(t-\tau) A(\tau) d\tau = H(t-T) \frac{d}{dt} \int_0^{t-T} k_1(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.3.16)$$

同様に

式1項：—

$$\frac{d}{dt} \int_{t-T}^t k(t-\tau) Q_n(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_{t-T}^{t-T_1} k_1(t-\tau) Q_n(\tau) d\tau \quad (1.3.17)$$

従つて  $0 < t < t_0$  なる凡ての  $t$  の値に対して適用可能な形式は次の如くに変へられる。

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{d}{dt} \int_{t-T}^{t-T_1} k_1(t-\tau) Q_n(\tau) d\tau + H(t-T_1) \frac{d}{dt} \int_0^{t-T_1} k_1(t-\tau) A(\tau) d\tau \\ &\quad - H(t-T) \frac{d}{dt} \int_0^{t-T} k_1(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.3.18) \end{aligned}$$

上式の具体的適用例は後節に述べる事とする。

\* (1.1.3) 式及び参考文献(15)参照



## 第2章 非周期的或は周期的被変調波入力に依つて高周波回路に誘起せらるる過渡並に定常現象の包絡波形の一般的解析法 (包絡演算子法と新解析法の適用)<sup>(1), (6)</sup>

### 2.1 概説

茲に云ふ高周波回路とは、単位跳躍函数入力に対する出力が所謂高周波振動的にて、之を構成する各成分自由振動の周波数が互に近接し、且つ減衰の時定数が振動周期に比して遙かに大なる回路を指すのであつて狭小帯域波回路が之に属する。

通常斯る回路に於て問題となるのは、搬送周波数が通過帯域の中央周波数に一致或は近接せる被変調波入力に依つて該回路に発生する現象の波形換言すれば、それを構成する高周波の包絡線(振幅)の形である。例へば斯る問題を所謂相乗定理 (1.1.1) 式にて解析せんか、入力  $e(t)$  は勿論、 $A(t)$  も考慮せざる可く高周波振動的にて、(1.1.1) 式にて得らるる解  $f(t)$  は  $e(t)$  及び  $A(t)$  を構成する種々の周波数の振動を含む。従つて  $f(t)$  の包絡線は之等周波数の異つた各種の振動の合成ベクトルの動径として映へらる。然るにベクトルを合成することは、之を數式的に或は圖式的に容易に行ひ得るか、合成するベクトルの數が増加するに依りてカオス度的に煩鎖となる。一や入力が圖式的に映へられた場合に於けるが如く、 $f(t)$  を圖式的に求める場合に在つては、 $e(t)$  及び  $A(t)$  が高周波振動的なる為到底その煩に耐へない。況んや入力が周期的なる場合には上述の困難の程度は更に倍加され、此の場合相乗定理は全く無力である。

然し乍ら、若し  $e(t)$  及び  $A(t)$  とて、夫々の包絡線波形を表す函数を採用し之に適當な演算を施行して直ちに  $f(t)$  の包絡線を求めらる事が可能ならん、此時既に論ぜられてゐる斯る回路の波形解析の真から云つて甚だ望ましい事は言さず誤らない。斯る目的に適合せる解析手段として従来あり種々の方法が提案されてゐることは既述の通りであるが、之等の精確の欠点として、近似的計算法であるにも拘らず、その誤差の判定法がない事が挙げらる。筆者が茲に提案せんとする包絡演算子法に於ては斯る欠点が完全に除去されたのみならず、圖式計算も甚だ簡便で低周波回路に於けると同様の手數で済む利点がある。

更に前章の周期力の一般的解析法を上述の包絡演算子法に適用する時は、入力が周期的被変調波なる場合と雖も、容易に過渡並に定常現象の包絡波形を求めることが出来る。

## 2.2 包絡演算子法 — 其の一 (包絡インデシヤル量)

単位跳躍函数入力に対する出力の  $p$  函数解が一般に

$$A(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \quad (2.2.1)$$

にて表されるものと仮定する。但し  $N(p)$  及び  $M(p)$  は夫々  $p$  に関して  $n$  次及び  $m$  次の有理整式にして、 $n \leq m$  なるものとす。或は上式を部分分數に展開すれば<sup>(7)</sup>

$$A(p) = \frac{N(\infty)}{M(\infty)} + \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{M'(p_i)} \frac{1}{p - p_i} \quad (2.2.2)$$

とする。但し

$$M'(p_i) = \left. \frac{dM(p)}{dp} \right|_{p=p_i} \quad (2.2.3)$$

にて、 $p_i$  は  $M(p) = 0$  の根にて、簡單の爲に之等の中に重根は存在しないと仮定する。

若し該回路が前述の如き高周波回路なりとせば、 $p_i$  は一般に複素數となり、 $p_i$  に共重なる  $\tilde{p}_i$  も亦  $M(p) = 0$  の根である。依つて、

$$\left. \begin{aligned} p_i &= -\alpha_i + j\beta_i \\ \tilde{p}_i &= -\alpha_i - j\beta_i \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

とおけば、(2.2.2) は更に次の様に表はす事が出来る。

$$A(p) = G_\infty + \sum_i \left\{ \frac{G'_i}{p + \alpha_i - j\beta_i} + \frac{\tilde{G}'_i}{p + \alpha_i + j\beta_i} \right\} \quad (2.2.5)$$

但し

$$G_\infty = \frac{N(\infty)}{M(\infty)}, \quad G'_i = \frac{N(p_i)}{M'(p_i)}, \quad \tilde{G}'_i = \frac{N(\tilde{p}_i)}{M'(\tilde{p}_i)} \quad (2.2.6)$$

にして  $\sum_i$  なる記号は斯る共軛複素根の凡ての値に対して總和する事を意味する。斯る回路に  $\varepsilon^{j\omega t} H(t)$  なる入力がかへられた場合の出力の演算子解は (2.2.5) 式を用いて次式で與へられる。

$$F_o(p) = \left[ G_\infty + \sum_i \left\{ \frac{G'_i}{p + \alpha_i - j\beta_i} + \frac{\tilde{G}'_i}{p + \alpha_i + j\beta_i} \right\} \right] \frac{p}{p - j\omega} \quad (2.2.7)$$

上式に所謂移項定理を適用する時は  $F_o(p)$  の  $t$  函数は次式で與へられる。

$$\begin{aligned} f_o(t) &= \mathcal{L}^{-1} F_o(p) \\ &= \varepsilon^{j\omega t} \left[ G_\infty + \mathcal{L}^{-1} \sum_i \left\{ \frac{G'_i}{p + \alpha_i - j(\beta_i - \omega)} + \frac{\tilde{G}'_i}{p + \alpha_i + j(\beta_i + \omega)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

\* 場合によつては  $M(p) = 0$  の根の中に実根を含む事もあり得る。今の場合には斯る実根の項は除外に考へる。尚斯る項に対する取扱法は後述の 2.4 参照の事

今

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1i} &= \int_0^t \frac{G_i'}{p + \alpha_i - j(\beta_i - \omega)} dt = \frac{G_i'}{\alpha_i - j(\beta_i - \omega)} [1 - e^{-\{\alpha_i - j(\beta_i - \omega)\}t}] \\ \varphi_{2i} &= \int_0^t \frac{\tilde{G}_i'}{p + \alpha_i + j(\beta_i + \omega)} dt = \frac{\tilde{G}_i'}{\alpha_i + j(\beta_i + \omega)} [1 - e^{-\{\alpha_i + j(\beta_i + \omega)\}t}] \end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

と置けば、若し  $\varphi_{1i}(t)$  と  $\varphi_{2i}(t)$  との間に

$$\frac{|\varphi_{2i}(t)|}{|\varphi_{1i}(t)|} \ll 1 \quad * \quad (2.2.10)$$

なる関係があれば、(1.4.8)式は近似的に

$$f_o(t) = u(t) e^{j\omega t} \quad (2.2.11)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= G_{\infty} + \sum_i \varphi_{1i}(t) = G_{\infty} + \sum_i G_i' [1 - e^{-\{\alpha_i - j(\beta_i - \omega)\}t}] \\ G_i' &= \frac{G_i'}{\alpha_i - j(\beta_i - \omega)} = \frac{N(p_i)}{(j\omega - p_i)M'(p_i)} \quad (p_i = -\alpha_i + j\beta_i) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.12)$$

然るに  $\beta_i$  が  $\omega$  に充分近接してゐるならば  $u(t)$  は明かに時間的に緩かな変化を伴現象を表す故、所要の出力  $f_o(t)$  は丁度  $e^{j\omega t}$  なる搬送波を  $u(t)$  にて変調せしが如き形として與へられてゐる。換言すれば  $u(t)$  が今の場合の出力の波形即ち包絡線を決定する。

又て (2.2.12) 式に於けた  $u(t)$  は包絡演算子法の最も基本的な量で、次節に於て述べる理由に依り、之を包絡インデシヤル量と呼称することとする。

次に上述の包絡線解析法は明かに近似計算法であつて、その精度従つて誤差は (2.2.10) の条件の成立如何に懸つてゐる。換言すれば (2.2.10) なる条件が本解析法の適用可能な範囲を決定する事で以下之を吟味しよう。

今簡単の爲に

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{1}{2Q_i}, \quad \frac{\beta_i - \omega}{\alpha_i} = 2Q_i \frac{\beta_i - \omega}{\beta_i} = \delta_i, \quad \alpha_i t = \tau_i \quad (2.2.13)$$

とおけば、(2.2.9)式に於て  $\omega$  が  $\beta_i$  に充分近接し、

$$\left. \begin{aligned} |\beta_i - \omega| &\ll \beta_i + \omega \quad \text{即ち} \quad |\delta_i| \ll 4Q_i \\ \text{にして且つ} \quad (4Q_i)^2 &\gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.14)$$

\* 厳密には

$$\frac{|\sum_i \varphi_{2i}(t)|}{|G_{\infty} + \sum_i \varphi_{1i}(t)|} \ll 1$$

と仮定すれば\*

$$\left. \begin{aligned} |y_{1i}(t)| &= \frac{|G_i| \sqrt{1 - 2\varepsilon^{-\tau_i} \cos \delta_i \tau_i + \varepsilon^{-2\tau_i}}}{\alpha_i \sqrt{1 + \delta_i^2}} \\ |y_{2i}(t)| &= \frac{|G_i| (1 + \varepsilon^{-\tau_i})}{4 \alpha_i Q_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.15)$$

従って

$$\frac{|y_{2i}(t)|}{|y_{1i}(t)|} = \frac{\sqrt{1 + \delta_i^2} (1 + \varepsilon^{-\tau_i})}{4 Q_i \sqrt{1 - 2\varepsilon^{-\tau_i} \cos \delta_i \tau_i + \varepsilon^{-2\tau_i}}} \quad (2.2.15)'$$

即ち  $\delta_i$  が充分小で  $Q_i$  が充分大ならば、 $\tau_i$  が極く小なる時を除けば、容易に  $|y_{2i}(t)|/|y_{1i}(t)| \ll 1$  なる条件を満足せしめ得る。

一方  $\tau_i$  が小なる時即ち  $\tau_i^3 \ll 1$ ,  $(\delta_i \tau_i)^3 \ll 1$  なる時は

$$\frac{|y_{2i}(t)|}{|y_{1i}(t)|} \cong \frac{(1 + \varepsilon^{-\tau_i})}{4 Q_i \tau_i} \quad (2.2.15)''$$

従って例へば  $Q_i = 200$  とせば  $\tau_i = 0.05$  なる時 (2.2.15)'' の値は凡そ 5%, 更に  $\tau_i = 0.1$  なる時は 2.5% となる。従つて今の場合  $\tau_i$  が 0.05 乃至 0.1 より大ならば、実用上  $y_{2i}(t)$  は  $y_{1i}(t)$  に対して無視して差支へないことが分る。従つて斯様な  $\tau_i$  の値に対する現象の解析には上述の解析法を用ひて差支へない筈である。

次に (2.2.15)'' は  $\tau_i = 0$  に於て  $\infty$  となるが之に關し一言注意して置きたい。即ち成程 (2.2.15)'' は  $\tau_i = 0$  に於て  $\infty$  とはなるが、之れは (2.2.15) 式より明かになれ、 $y_{1i}(t)$  が 0 になる為であつて、 $y_{2i}(t)$  は常に元來小なり値であることに注意しなければならぬ。従つて誤差としては (2.2.15)' の如く瞬時値の比を取らざる

$$\frac{|y_{2i}(t)|}{\max |y_{1i}(t)|} \quad \text{或は} \quad \frac{|y_{2i}(t)|}{|y_{1i}(\infty)|} = \frac{\sqrt{1 + \delta_i^2} (1 + \varepsilon^{-\tau_i})}{4 Q_i} \quad (2.2.16)$$

と定義する方が妥当である。此の場合には  $Q_i = 200$ ,  $\delta_i = 0$  とせば

$$0.00125 \leq \frac{|y_{2i}(t)|}{|y_{1i}(\infty)|} \leq 0.0025$$

となり、 $y_{2i}(t)$  は充分無視し得る筈である。

誤差の定義を (2.2.16) 或は (2.2.16) の何れとするにせよ、凡ての  $\tau_i$  に対して  $Q_i$  が出来る大にして、 $\delta_i$  は小なる程、本解析法の精度は向上するのであつて、斯る条件の満足せられる回路は結局前本の如き高周波回路で、狭小帯域濾波器はその代表的回路

\* 斯る条件は (2.2.15)' を導出せる仮定 (2.2.14) と矛盾するものではない。



であることが分るであらう。

尚最後に以下の使用の便を考慮して  $u(t)$  に対する  $p$  函数を求めねば

$$\Pi(p) = \mathfrak{L}_0^{-1} u(t) = G_\infty + \sum_i \frac{G_i \{\alpha_i - j(\beta_i - \omega)\}}{p + \alpha_i - j(\beta_i - \omega)} \quad (2.2.17)$$

である。

### 2.3 包絡演算子法 — 其の一 (包絡相乗定理)

単位跳躍函数入力に対する出力の  $p$  函数解が (2.2.5) 式にて與へられるが、如き高周波回路に、或る任意の被変調波  $e(t)E^{j\omega t} H(t)$  が加へられた時の出力の  $p$  函数は明かに次式を以て算定せられる。

$$F(p) = [G_\infty + \sum_i \left\{ \frac{G_i}{p + \alpha_i - j\beta_i} + \frac{\tilde{G}_i}{p + \alpha_i + j\beta_i} \right\}] \mathfrak{L}_0^{-1} e(t) E^{j\omega t} \quad (2.3.1)$$

然るに前と同様 移項定理を上式に適用する時は所要の出力は、

$$f(t) = E^{j\omega t} \mathfrak{L}_0 \left[ G_\infty + \sum_i \left\{ \frac{G_i}{p + \alpha_i - j(\beta_i - \omega)} + \frac{\tilde{G}_i}{p + \alpha_i + j(\beta_i + \omega)} \right\} \right] E(p) \quad (2.3.2)$$

但し

$$E(p) = \mathfrak{L}_0^{-1} e(t) \quad (2.3.3)$$

従つて (2.2.10) の条件があれば、 $f(t)$  は近似的に次式で與へられる。

$$\begin{aligned} f(t) &\cong E^{j\omega t} \mathfrak{L}_0 \{ \Pi(p) E(p) \} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) u(\tau) d\tau \right\} E^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

但し  $\Pi(p)$  及び  $u(t)$  は夫々 (2.2.17) 及び (2.2.12) に依つて與へられる。即ち今の場合の出力の包絡線の  $p$  函数を  $W(p)$ 、 $t$  函数を  $w(t)$  とせば

$$W(p) = \Pi(p) E(p) \quad (2.3.5)$$

$$w(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (2.3.6)$$

となる。上式は所謂相乗定理 (1.1.1) 式と全く同一のもので、(1.1.1) 式の入力  $e(t)$  には、今の場合の入力たる被変調波の包絡線  $e(t)$  が対応し、一方 (1.1.1) 式のインデシャル量  $A(t)$  には、単位跳躍函数的包絡線を有する高周波入力  $E^{j\omega t} H(t)$  に対する出力の包絡線  $u(t)$  が対応する。斯様な意味から  $u(t)$  を包絡インデシャル量と呼称した次第で、(2.3.6) 式を (1.1.1) 式に対して包絡相乗定理と命名する。



按て(2.2.12)式利用かなしく,  $u(t)$  は一般に複素数にて

$$u(t) = \alpha(t) + j\beta(t) \quad (2.3.7)$$

なる形を取る故,  $w(t)$  も亦複素数となり,  $|w(t)|$  が実際の出力の包絡線となる。

尚(2.3.4)式なる積分を図式的に行ふ場合には, (2.3.7)式を代入すれば

$$w(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e^{j(t-\tau)} \alpha(\tau) d\tau + j \frac{d}{dt} \int_0^t e^{j(t-\tau)} \beta(\tau) d\tau \quad (2.3.8)$$

となるを以て, 実数部と虚数部の各々に就いて図式積分を行ひ, 然る後, その絶対値を以て出力の包絡線となさねばならない。

斯くて我々は包絡線函数のみの相乗に依り, 直ちに所要の出力の包絡線を得る事が可能となった。のみならず, 仮令, 入力が図式的に與へられた場合にも(2.3.6)の演算を圖式的に行ふ事に依つて容易に所要の包絡線を得る事が出来る。

## 2.4 包絡演算子法—其の三(補遺)

本節に於ては  $A(t)$  が非振動的指數函数項或は低周波振動項を含む場合に就いて考察する。以上2.2及び2.3の所論は  $A(t)$  が入力高周波の開表數に接近せる周波數を有する高周波振動項のみより成る場合に対するものであるが, (勿論  $A(t)$  は(2.2.5)式に示す如く常數項を含むも差支へない)  $A(t)$  が斯る高周波振動項の外に, 低周波振動項或は非振動的指數函数項を含む場合に対しても前述の包絡演算子法的取扱いは可能なのである。勿論通常の場合に於ては, 低周波振動項或は非振動的指數函数項は高周波振動項に比して極めて小なるを以て, 之を無視し前述の包絡演算子法を適用しても差支へないのが常であるが, 斯る近似計算を施行し得ざる場合に就いて考へよう。

今  $M(p)=0$  の根の中, 上述の低周波振動項或は非振動的指數<sup>指數</sup>函数項に關する根を  $p_0$  とし, 高周波振動項に關する根を  $p_i$  とせば

$$A(p) = \left\{ \frac{N(\infty)}{M(\infty)} + \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{M'(p_i)} \frac{1}{p-p_i} \right\} + \sum_{p_0} \frac{N(p_0)}{M'(p_0)} \frac{1}{p-p_0} \quad (2.4.1)$$

と表し得る。

(A) 入力が  $E^{j\omega t}$  なる場合

出力の  $p$  函数解は

$$F(p) = \left[ \left\{ \frac{N(\infty)}{M(\infty)} + \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{M'(p_i)} \frac{1}{p-p_i} \right\} + \sum_{p_0} \frac{N(p_0)}{M'(p_0)} \frac{1}{p-p_0} \right] \frac{p}{p-j\omega} \quad (2.4.2)$$

上式に移項定理を適用し且つ右辺の $\{\dots\}$ の項に2.2の結論を適用すべし

$$f_0(t) \equiv \{u(t) + \chi(t)\} \varepsilon^{j\omega t} \quad (2.4.3)$$

但し  $u(t)$  は (2.2.2) の夫と同じで

$$\chi(t) = \sum_0 \sum_{p_0} \frac{N(p_0)}{M'(p_0)} \frac{1}{p - (p_0 - j\omega)} = \sum_0 G_0 \{1 - \varepsilon^{(p_0 - j\omega)t}\} \quad (2.4.4)$$

$$G_0 = \frac{N(p_0)}{(j\omega - p_0)M'(p_0)} \quad (2.4.5)$$

従つて

$$f_0(t) \equiv u'(t) \varepsilon^{j\omega t} + \lambda_1(t) \quad (2.4.6)$$

茲に

$$u'(t) = u(t) + \sum_0 G_0 = \{G_\infty + \sum_0 G_0\} + \sum_i G_i \{1 - \varepsilon^{\{-\alpha_i - j(\beta_i - \omega)t\}}\} \quad (2.4.7)_1$$

$$\lambda_1(t) = - \sum_0 G_0 \varepsilon^{p_0 t} \quad (2.4.7)_2$$

然るに  $\lambda_1(t)$  は振動的或は非振動的な低周波成分を意味し、 $u'(t)$  は今の場合の高周波成分の包絡線を示すものである。即ち次の結論を得る。

“入力が  $\varepsilon^{j\omega t}$  なる場合の出力は (2.4.7)<sub>2</sub> 式なる低周波出力に (2.4.7)<sub>1</sub> 式なる包絡線を有する高周波出力が重畳したものとなる。”

(B) 入力  $e(t) \varepsilon^{j\omega t}$  なる一般被変調波なる場合

此の場合の出力は (2.3.4) 式と同様にして

$$f(t) = \varepsilon^{j\omega t} \left[ \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) u(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t \chi(t-\tau) e(\tau) d\tau \right] \quad (2.4.8)$$

$$= \varepsilon^{j\omega t} \left\{ w(t) + \frac{d}{dt} \int_0^t \chi(t-\tau) e(\tau) d\tau \right\} \quad (2.4.8)'$$

但し  $w(t)$  は (2.3.6) 式にて表へらるるものと同じである。然るに

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{j\omega t} \frac{d}{dt} \int_0^t \chi(t-\tau) e(\tau) d\tau \\ &= \sum_0 G_0 \left[ e(t) \varepsilon^{j\omega t} - e(0) \varepsilon^{p_0 t} - \varepsilon^{p_0 t} \int_0^t e'(\tau) \varepsilon^{(j\omega - p_0)\tau} d\tau \right] \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

上式右辺の積分に部分積分法を繰返して適用すべし

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{j\omega t} \frac{d}{dt} \int_0^t \chi(t-\tau) e(\tau) d\tau \\ &= \sum_0 G_0 \left[ z_n(t) \varepsilon^{j\omega t} - z_n(0) \varepsilon^{p_0 t} - \frac{\varepsilon^{p_0 t}}{(p_0 - j\omega)^n} \int_0^t e^{(n+1)}(\tau) \varepsilon^{(j\omega - p_0)\tau} d\tau \right] \end{aligned} \quad (2.4.9)'$$

$$\text{但し } z_n(t) = e(t) + \frac{e'(t)}{p_0 - j\omega} + \frac{e''(t)}{(p_0 - j\omega)^2} + \dots + \frac{e^{(n)}(t)}{(p_0 - j\omega)^n} \quad (2.4.10)$$

従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{(n)}(\tau)}{(p_0 - j\omega)^n} = 0 \quad (2.4.11)$$

よって

$$\{ (2.4.9) \text{式} \} = \sum_n G_n [z(t) e^{j\omega t} - z(0) e^{p_0 t}] \quad (2.4.9)''$$

茲に

$$z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) \quad (2.4.10)'$$

従って

$$f(t) = w'(t) e^{j\omega t} + \lambda_2(t) \quad (2.4.12)$$

$$w'(t) = w(t) + \sum_n G_n z(t) \quad (2.4.13)_1$$

$$\lambda_2(t) = - \sum_n G_n z(0) e^{p_0 t} \quad (2.4.13)_2$$

即ち次の結論を得る。

“入力が  $e(t) e^{j\omega t}$  なる場合の出力は (2.4.13)<sub>2</sub> 式なる低周波分と (2.4.13)<sub>1</sub> 式なる  
 包絡曲線と有する高周波分が重畳したものに等えられる。”

尚  $z(t)$  及び  $z(0)$  について ≡ 注意すべき事項がある。

(1) 若し  $|e(t)| \gg \left| \frac{e^{(n)}(t)}{(p_0 - j\omega)^n} \right|$  ( $n=1, 2, \dots$ ) なる時は (2.4.10) 及び (2.4.10)' 式より

$$z(t) \cong e(t), \quad z(0) \cong e(0)$$

なるを以て、 $w'(t)$  及び  $\lambda_2(t)$  と  $w(t)$  及び  $\lambda_1(t)$  との間には夫々下記のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} w'(t) &= w(t) + e(t) \sum_n G_n = \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) w(\tau) d\tau + e(t) \sum_n G_n \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) w'(\tau) d\tau \\ \lambda_2(t) &= -e(0) \sum_n G_n e^{p_0 t} = e(0) \lambda_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.14)$$

(2) Macclaurin の展開式を用ひて  $e(t)$  を展開すれば”

$$e(t) = e(0) + \frac{e'(0)}{1!} t + \frac{e''(0)}{2!} t^2 + \dots$$

或は更に一般に

$$e^{(n)}(t) = e^{(n)}(0) + \frac{e^{(n+1)}(0)}{1!} t + \frac{e^{(n+2)}(0)}{2!} t^2 + \dots \quad (2.4.15)$$

なるを以て上式の  $p$  変数は

$$E^{(n)}(p) \equiv \mathcal{L}^{-1} e^{(n)}(t) = e^{(n)}(0) + e^{(n+1)}(0) p^{-1} + e^{(n+2)}(0) p^{-2} + \dots \quad (2.4.15)'$$

上式を利用すれば”次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} z(t) &= E(p_0 - j\omega) + \frac{E'(p_0 - j\omega)}{1!} t + \frac{E''(p_0 - j\omega)}{2!} t^2 + \dots \\ z(0) &= E(p_0 - j\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.16)$$

\*  $E^{(n)}(p)$  は  $\frac{d^n E(p)}{dp^n}$  の意味ではない。

(3) (2.4.4) 式の関係を利用すれば

$$\begin{aligned} \{(2.4.9) \text{ 式}\} &= \varepsilon^{j\omega t} \sum_p G_p \oint \frac{(j\omega - p_s) E(p)}{p - (p_s - j\omega)} E(p) \\ &= \varepsilon^{j\omega t} \sum_p G_p \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{(j\omega - p_s) E(p)}{p - (p_s - j\omega)} \varepsilon^{pt} dp \right] \quad (2.4.17) \end{aligned}$$

と表す事が出来る。然るに右辺積分内の積分値中  $p = p_s - j\omega$  なる極の存在に基づき値 ( $p = p_s - j\omega$  に於ける留数の値) を  $R_1(t)$  とせば

$$R_1(t) = -E(p_s - j\omega) \varepsilon^{(p_s - j\omega)t}$$

となるを以て (2.4.13) 式及び (2.4.16) 式より次の関係を得る。

$$\lambda_2(t) = \sum_p G_p R_1(t) \varepsilon^{j\omega t} \quad (2.4.18)$$

一方  $E(p)/p$  の有する  $R_2$  の特異点に基づく積分値を  $R_2(t)$  とせば次の関係がある。

$$\lambda_2(t) = R_2(t)^* \quad (2.4.19)$$

以上 (2.4.18) 及び (2.4.19) なる関係式は、本包絡演算子法の具体的適用に際し、 $\lambda_2(t)$  及び  $\lambda_2(t)^*$  の実際の簡易計算法と與へるものである。

\*  $E(p)$  は  $\varepsilon^{pt}$  なる  $e(t)$  の  $p$  函数なるを以て (2.4.15) 式に依れば

$$E(p) = e(0) + e'(0)p^{-1} + e''(0)p^{-2} + \dots$$

$$\text{従つて } \frac{(j\omega - p_s) E(p)}{p - (p_s - j\omega)} \varepsilon^{pt} = \frac{j\omega - p_s}{p - (p_s - j\omega)} \left\{ \frac{e(0)}{p} + \frac{e'(0)}{p^2} + \dots \right\} \varepsilon^{pt}$$

依つて上式の  $p=0$  に於ける留数を求むれば之が所要の  $R_2(t)$  と與へる。然るに上式右辺の任意の項の  $p=0$  に於ける留数を求むるに

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi j} \oint_{p=0} \frac{(j\omega - p_s) e^{(n)}(0)}{p - (p_s - j\omega)} \varepsilon^{pt} dp \\ &= \frac{(j\omega - p_s) e^{(n)}(0)}{n!} \left[ \frac{d^n}{dp^n} \frac{\varepsilon^{pt}}{p - (p_s - j\omega)} \right]_{p=0} = e^{(n)}(0) \sum_{l=0}^n \frac{t^{n-l}}{(p_s - j\omega)^{l(n-l)!}} \end{aligned}$$

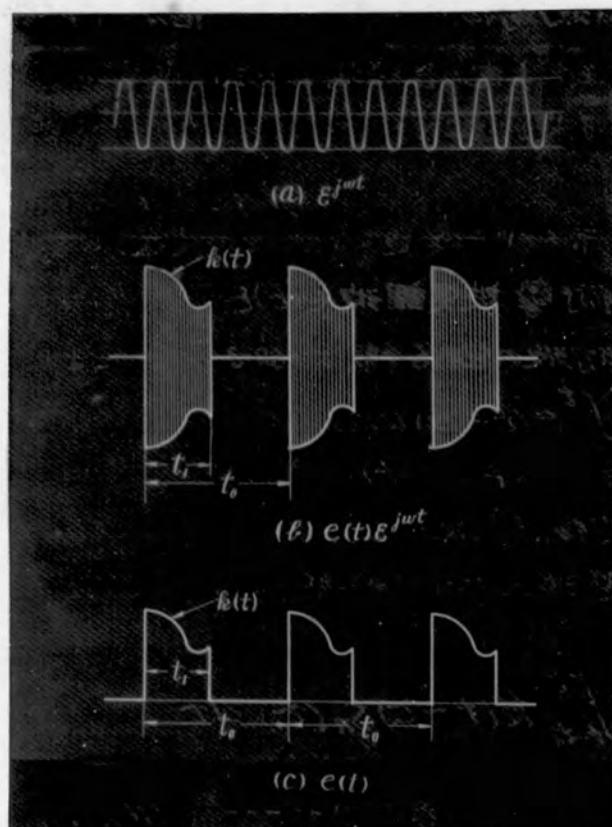
$$\text{故に } R_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n)}(0) \sum_{l=0}^n \frac{t^{n-l}}{(p_s - j\omega)^{l(n-l)!}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(p_s - j\omega)^l} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{t^{n-l}}{(n-l)!} e^{(n)}(0)$$

然るに (2.4.15) 式に依れば

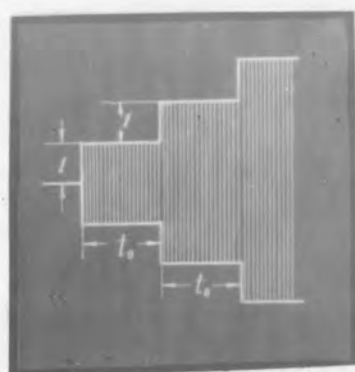
$$\sum_{n=l}^{\infty} \frac{t^{n-l}}{(n-l)!} e^{(n)}(0) = e^{(l)}(t)$$

$$\text{なるを以て } R_2(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{(l)}(t)}{(p_s - j\omega)^l} = \lambda_2(t) \quad ((2.4.10) \text{ 及び } (2.4.10)' \text{ 式参照})$$

之が所要の関係式である。



第 2.5.1 圖



第 2.5.2 圖



## 2.5 任意の周期的被変調波入力に依つて誘起する現象の包絡線の一般的解析法

第1章に説述せる解析法を上述の包絡線算子法に適用する時は、入力として任意の波形式に周期的に変調された高周波が加へられた時の出力の包絡線の一般的解析法を得る。

即ち第2.5.1図(2)に示すがや~~の~~連続的な搬送波を周期的に変調して同図(1)に示すが如き周期的衝撃被変調波  $e(t)E^{j\omega t}$  を得たとする。斯る周期的変調波が印加せられた時の出力波の包絡線は (2.3.4) 式により

$$w(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) U(\tau) d\tau \quad (2.5.1)$$

にて與へられる。然るに今の場合の  $e(t)$  は第2.5.1図(1)に示す周期が  $t_0$  として  $R(t)$  なる波形を有する周期的衝撃波の全体を表すものである。従つて第1章の所論に従へば、 $n$  周期目の過渡出力の包絡線は、(1.1.11)式に對應して次式で與へられる事は明かであらう。

$$w_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t R(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (2.5.2)$$

$$\text{茲に} \quad S_n(\tau) = U(\tau)H(\tau) + U(t_0+\tau) + \dots + U((n-1)t_0+\tau) \quad (2.5.3)$$

或は上式に (2.2.2) 式を代入すれば

$$S_n(\tau) = \left\{ G_{00} + \sum_i G_i \right\} \{ (n-1) + H(\tau) \} - \sum_i G_i \left\{ H(\tau) + \frac{E^{-A_i t_0} (1 - E^{-(n-2)A_i t_0})}{(1 - E^{-A_i t_0})} \right\} E^{-A_i \tau} \quad (2.5.3)'$$

$$A_i = \alpha_i - j(\beta_i - \omega)$$

但し、(2.5.2)式の時間変数  $t$  の原典は  $n$  周期目の初期に選定してある。

次に(2.5.3)式に示す  $S_n(\tau)$  の意味を考へるに、 $S_n(\tau)$  は第2.5.2図に示すが如く階段的包絡線を有する被変調波入力に對する  $n$  段階目の出力の包絡線を時間変数  $\tau$  の原典を該段階の初期に取つて表したものであることは (2.5.3) 式より明かであらう。

以下斯る  $S_n(\tau)$  を一種周期的包絡インデシヤル量と呼称する。

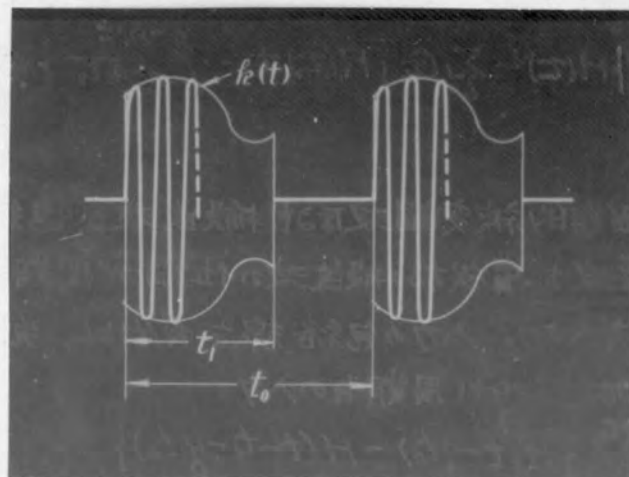
尚 1.3 の注意 1 に依れば  $S_n(\tau)$  中の常數項は省略しても差支へないから、

$$S_n(\tau) = \left\{ G_{00} + \sum_i G_i \right\} H(\tau) - \sum_i G_i \left\{ H(\tau) + \frac{E^{-A_i t_0} (1 - E^{-(n-2)A_i t_0})}{1 - E^{-A_i t_0}} \right\} E^{-A_i \tau} \quad (2.5.3)''$$

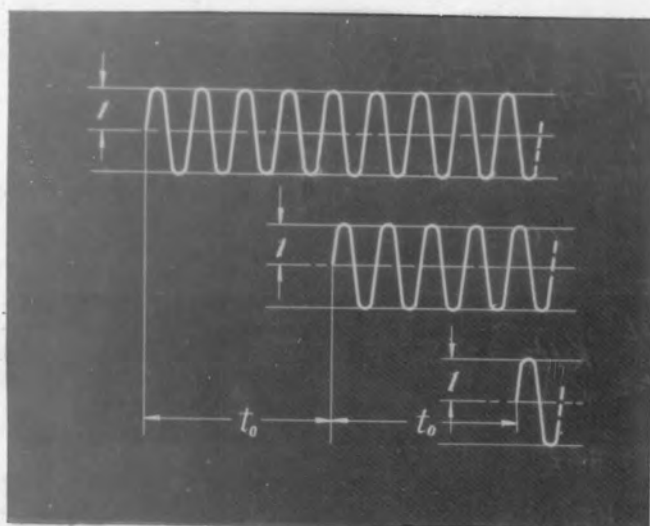
と見做す事が出来る。従つて定常状態に於ける出力の包絡線は次式で與へられる。

$$w(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t R(t-\tau) S(\tau) d\tau \quad (2.5.4)$$

$$\text{但し} \quad S(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\tau) = U(\tau)H(\tau) + U(t_0+\tau) + U(2t_0+\tau) + \dots \quad (2.5.5)$$



第 2·5·3 圖



第 2·5·4 圖

これ筆者の所謂  $\omega$  種周期的定常包絡インデックス量である。或は(2.5.3)"式より

$$S(\omega) = \left\{ G_{\infty} + \sum_{\ell} G_{\ell} \right\} H(\omega) - \sum_{\ell} G_{\ell} \left\{ H(\omega) + \frac{e^{-A_{\ell} t_0}}{1 - e^{-A_{\ell} t_0}} \right\} e^{-A_{\ell} t_0} \quad (2.5.5)'$$

とも表し得る。

次ぎに入力は同じく周期的被変調波なるも搬送波が連続ではなく、(2.5.3)図に示すが如く、各衝突波を構成する搬送波の位相が"周期  $t_0$  の値の如何に拘らず"凡て等しい場合に就いて考へよう。入力の包絡線を  $k(t)$  とし、先づ時間の原点を  $\omega$  1 周期の初期に取る。然る時、 $\omega$   $q+1$  周期目の入力

$$k(t - q t_0) e^{j\omega(t - q t_0)} \{ H(t - q t_0) - H(t - t_0 - q t_0) \} \quad (2.5.6)$$

に依つて誘起せらるる現象は (1.1.5) と (2.3.4) 式より

$$f_q(t) = e^{j\omega t} \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^{t-q t_0} k(t-\tau) U(\tau) e^{-j\omega \tau} H(\tau) d\tau \quad (2.5.7)$$

にて與へらる。以下 1.1 に於けると同様 (1.1.6) なる関係式に依りて  $\tau$  を  $\xi$  に変換すれば

$$f_q(t) = e^{j\omega t} \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t k(t-\xi) U(\xi - q t_0) e^{-j\omega(\xi - q t_0)} H(\xi - q t_0) d\xi \quad (2.5.7)'$$

と作るを以て、所要の  $\omega$  種周期目に於ける出力は

$$F_n(t) = \sum_{q=0}^{n-1} f_q(t)$$

にて算定せらる。上式に於て時間変数  $t$  の原点を  $\omega$  種周期目の初期に移し、同時に  $\xi = (n-1)t_0 + \tau$  なる関係式に依つて  $\tau$  を  $\tau$  に変換すれば

$$F_n(t) = e^{j\omega t} \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t k(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (2.5.8)$$

$$S_n(\tau) = U(\tau) H(\tau) + e^{-j\omega t_0} U(t_0 + \tau) + e^{-2j\omega t_0} U(2t_0 + \tau) + \dots + e^{-(n-1)j\omega t_0} U((n-1)t_0 + \tau) \quad (2.5.9)$$

即ち所要の包絡出力は

$$W_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t k(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (2.5.10)$$

にて算定せらる。上式は形式的には (2.5.2) 式と全く同じであるが、 $S_n(\tau)$  の値は (2.5.2) 式の夫とは異なる。即ち今の場合 (2.5.9) 式より明かな如く (2.5.4) 図に示すが如く  $e^{j\omega t}$  なる定振幅の高周波が  $t_0$  づつ遅れて次ぎ々ぎに付加された場合の  $\omega$  種段階目の出力の包絡線を、時間変数  $\tau$  の原点を  $\omega$  種段階目の初期

に置いて表したものに外ならない。(2.5.9)式の $S_n(\omega)$ を(2.5.3)の式に代入して求めた種  
周期的包絡インデシャル量と呼称する。

尚(2.5.6)式は更に(2.2.12)式を代入し且つ常數項を省略すれば

$$S_n(\omega) = \left\{ G_0 + \sum_i G_i \right\} H(\omega) - \sum_i G_i \left\{ H(\omega) + \frac{e^{-B_i t_0} (1 - e^{-n-2B_i t_0})}{1 - e^{-B_i t_0}} \right\} e^{-A_i \omega} \quad (2.5.9)'$$

$$A_i = \alpha_i - j(\beta_i - \omega), \quad B_i = A_i + j\omega = \alpha_i - j(\beta_i - 2\omega)$$

と表す事が出来る。

一方、定常状態は

$$w(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_0}^t k(t-\tau) S(\tau) d\tau \quad (2.5.11)$$

$$S(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = U(\omega) H(\omega) + e^{-j\omega t_0} U(\omega_0 + \omega) + e^{-2j\omega t_0} U(2\omega_0 + \omega) + \dots$$

或は

$$= \left\{ G_0 + \sum_i G_i \right\} H(\omega) - \sum_i G_i \left\{ H(\omega) + \frac{e^{-B_i t_0}}{1 - e^{-B_i t_0}} \right\} e^{-A_i \omega} \quad (2.5.12)$$

にて算定せられる。上記の $S(\omega)$ を二種周期的定常包絡インデシャル量と呼称すること  
する。

尚入力の包絡線が以上の如き周期的衝撃波以外の種々の形式の周期波  
を包絡線とする被変調波入力に対する解析法は以上の諸結果の特別の場合  
として與へられる事は1.2に於けると同様である。

最後に一言注意に置きたい事がある。即ち入力の搬送波が各衝撃波を通じて連続  
なる時(オ2.5.1図)は、オ1種周期的包絡インデシャル量は $A_i t_0$ のみに依つて定まり、 $\beta_i t_0$   
及び $\omega t_0$ 自身の値には無関係であるから、今の包絡線力は $A_i t_0$ 及び $A_i t_0$ の値が定まら  
ば $\beta_i t_0$ 、 $\omega t_0$ 、 $\beta_i t_0$ 及び $\omega t_0$ の値そのものに依つては左右されない。之に反し、入力の搬  
送波が各衝撃波を通じて不連続なる時(オ2.5.3図)は、オ2種周期的包絡  
インデシャル量は $A_i t_0$ のみならず $\omega t_0$ の値にも無関係であるから、今の包絡線力は $A_i t_0$ 及び $A_i t_0$   
の値のみならず $\beta_i t_0$ 或は $\omega t_0$ の値そのものに依つても亦化する。但し $\omega t_0$ 或は $\beta_i t_0$ の値  
には無関係である。(オI編 オ4章及びオ6.2参照)

### 第3章 單段増幅器の過渡現象と周期波増幅特性<sup>(P)</sup>

#### 3.1 序言

増幅器回路の過渡現象に関する研究に就ては既に緒論に於て述べておられる如く枚挙に暇な現状であるが、之等の研究は夫々の必要に応じて各々特定の回路を取上げて論じたものが多い。

斯る事實に鑑みて本章では各種單段増幅器——例へば“低周波増幅器、高周波増幅器、饋入増幅器等——回路の過渡現象を専ら数学的見地から広く一般的に且つ体系的に論じ、各種増幅器の過渡的特性の相互関係を明確ならしめ、従来雜然と論じられて来た増幅器回路の過渡現象に関する種々の結果に有機的な関係性を與へんとするものである。

然して更にオ1編に於て論じた各種單段増幅器の周期波増幅特性を更に一般的回路に拡張し、オ1編オ3章及びオ4章の結果を更に一般化且つ体系化せんとするものである。

#### 3.2 低周波増幅器

單位時間函数入力  $H(t)$  に対応する出力の  $p$  函数解は一般に次式にて表現する事が出来る。

$$A(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \quad (3.2.1)$$

但し  $M(p)$  及び  $N(p)$  は夫々  $p$  に就て  $m$  次及び  $n$  次 ( $m \geq n$ ) の有理整式である。然るに上式は次の如く部分々數に展開する事が出来る。

$$A(p) = G_0 + \sum_{i=1}^m \frac{G_i p}{p + A_i} \quad (3.2.2)$$

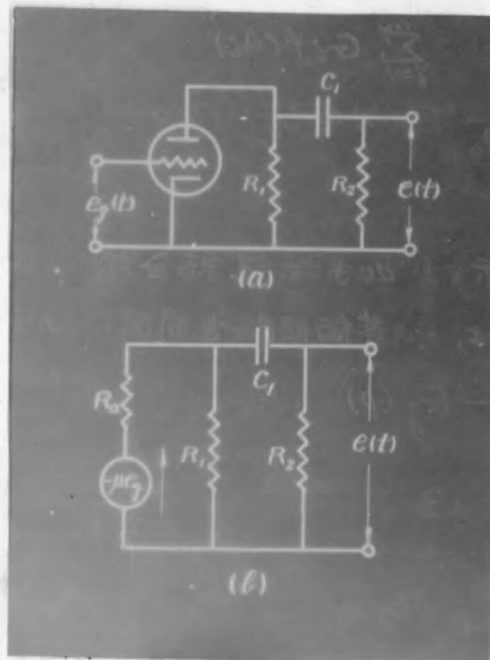
$$\text{茲に} \quad G_0 = \frac{N(0)}{M(0)}, \quad G_i = -\frac{N(-A_i)}{A_i \left( \frac{dM(p)}{dp} \right)_{p=-A_i}} \quad (3.2.3)$$

にて  $p = -A_i$  は  $M(p) = 0$  の根にて、簡單の爲に之等は凡て單根なりとす。然して  $G_0$  は云ふ迄もなく、今の場合の定常出力を意味し、若し該増幅器が“直流増幅器”ならば“ $G_0 \neq 0$ ”であり、交流増幅器ならば“ $G_0 = 0$ ”なる可き性質のものである。俟つて入力が“ $E_g(t)$ ”なる場合の出力の  $p$  函数は、 $E_g(t)$  の  $p$  函数を  $E_g(p)$  とせば、

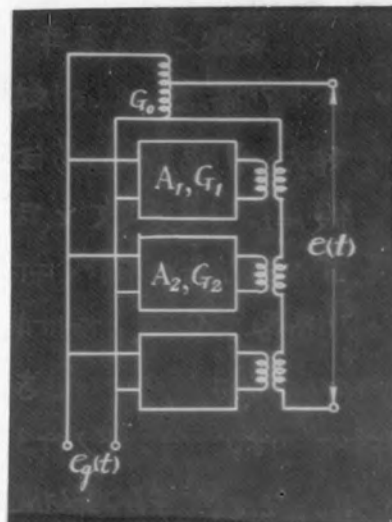
$$E(p) = \left\{ G_0 + \sum_{i=1}^m \frac{G_i p}{p + A_i} \right\} E_g(p) \quad (3.2.4)$$

にて與へられるから所要の出力は





第 3 · 2 · 1 圖



第 3 · 2 · 2 圖

$$e(t) = G_0 e_g(t) + \sum_{i=1}^m G_i f(A_i) \quad (3.2.5)$$

$$f(A_i) = \int_0^\infty \frac{p}{p+A_i} E_g(p) = \frac{d}{dt} \int_0^t e_g(t-\tau) e^{-A_i \tau} d\tau \quad (3.2.6)$$

となる。

然るにオ3.2.1図(a)に示すか如き抵抗結合増幅器に前述の  $e_g(t)$  なる信号を著へた時の出力の  $p$  函数は、その等価回路を同図(b)の如くに仮定すれば、

$$E(p) = \frac{G p}{p+A} E_g(p) \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{茲に} \quad A &= (R_1 + R_2) / C_1 R_0^2 \\ G &= -\mu R_1 R_2 / R_0^2 \\ R_0^2 &= R_1 R_2 + R_2 R_0 + R_0 R_1 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

依つて所要の出力は(3.2.6)を用いて

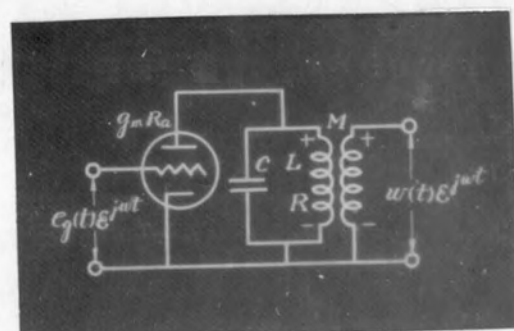
$$e(t) = G f(A) \quad (3.2.9)$$

と表す事が出来る。

以上(3.2.5)と(3.2.9)式を比較すれば、明かな如く、任意の低周波増幅器の出力は  $G_0 e_g(t)$  と、減衰率が  $A_i$ 、増幅率が  $G_i$  なる ( $i=1, 2, \dots, m$ )  $m$  箇の抵抗結合増幅器の出力の和で表す事が出来る。換言すれば、任意の増幅器の等価回路はオ3.2.2図に示すか如く、減衰器と、減衰率が  $A_i$ 、増幅率が  $G_i$  なる (但し  $i=1, 2, \dots, m$ )  $m$  箇の抵抗結合増幅器の並列結合とて表す事が出来る。但し(3.2.8)式より明かな如く、抵抗結合増幅器の場合には、 $A$  及び  $G$  は共に実数なるも(3.2.5)の  $A_i$  及び  $G_i$  は一般には複素数となる場合もあり得るのであって、上述せるか如き一般増幅器の等価回路の構成には、複素減衰率及び複素増幅率を有する仮想的抵抗結合増幅器を仮定しなければならない。然し乍ら與へられた増幅器に就いて、 $M(p)$ ,  $N(p)$  或は、 $A_i$ ,  $G_i$  を求め ~~置~~ せば、之等の増幅器の過渡現象は解析的には、(3.2.6)なる演算子形に就いて論ずれば、之等の代数和として與へられ、その數學的取扱は極めて簡便となる。

斯様な意味に於て以下上述の複素減衰率及び複素増幅率を有する仮想的抵抗結合増幅器を單位低周波増幅器と呼称し、その出力たる(3.2.6)の  $f(A)$  を基本(低周波)出力と呼ぶ事とする。

低



第 3·3·1 圖

## 3.3 高周波増幅器

単位函数入力に対する任意の高周波増幅器のお力の $p$ 函数が、一般に

$$A(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \quad (3.3.1)$$

にて與へられる場合、2.2の所論に従へば、任意の変調高周波入力  $E_g(t) e^{j\omega t}$  が加へられた時のお力波の包絡線の $p$ 函数  $W(p)$  は (2.2.17) 及び (2.3.5) 式より

$$W(p) = \Pi(p) E_g(p) \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{茲に} \quad E_g(p) &= \mathcal{F}^{-1} E_g(t) \\ \Pi(p) &= G_\infty + \sum_i \frac{G_i A_i}{p + A_i} \\ G_\infty &= \frac{N(\infty)}{M(\infty)} ; \quad G_i = \frac{N(p_i)}{A_i \left( \frac{dM(p)}{dp} \right)_{p=p_i}} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

然して  $M(p) = 0$  の一組の共軛根を  $-\alpha_i \pm j\beta_i$  とおけば

$$\begin{aligned} p_i &= -\alpha_i + j\beta_i \\ A_i &= \alpha_i - j(\beta_i - \omega) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

従つて所要のお力の包絡線の $t$ 函数  $w(t)$  は

$$w(t) = G_\infty E_g(t) + \sum_i G_i g(A_i) \quad (3.3.5)$$

$$g(A_i) = \mathcal{F} \frac{A_i}{p + A_i} E_g(p) = \frac{d}{dt} \int_0^t E_g(t-\tau) (1 - e^{-A_i \tau}) d\tau \quad (3.3.6)$$

にて與へられる。

茲に 第3.3.1圖に示すが如き所謂単一回路増幅器に在つては

$$A(p) = \frac{-g_m M R_a p}{R_a L C p^2 + (R_a R C + L) p + R + R_a} \quad (3.3.7)$$

にて與へられる故、今の場合のインデシャル包絡増幅率の $p$ 函数  $\Pi(p)$  は次の如くなる。

$$\Pi(p) = \frac{G A}{p + A} \quad (3.3.8)$$

但し

$$G = \frac{g_m M (\alpha - j\beta)}{2j A \beta L C}, \quad A = \alpha - j(\beta - \omega) \quad (3.3.9)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{1}{C R_a} \right), \quad \beta = \sqrt{\frac{R + R_a}{L C R_a} - \alpha^2} \quad (3.3.10)$$

或は簡單の爲に

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{L C}} &= \omega_0, \quad \frac{\omega_0 L}{R} = Q_L, \quad \omega_0 C R_a = Q_C, \\ \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} &= \frac{1}{Q}, \quad Q_L Q_C \gg 1, \quad 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \delta \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

と置けば

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \right) = \frac{\omega_0}{2Q}, \quad \beta \cong \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \cong \omega_0 \quad (3.3.10)'$$

にて

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\omega_0}{2Q} (1+j\delta) \\ G &= \frac{g_m \omega_0 M (1-j2Q)}{j2(1+j\delta)} \cong -\frac{g_m \omega_0 M Q}{1+j\delta} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.9)'$$

従って入力  $e_g(t) e^{j\omega t}$  なる被変調波なる場合の出力の包絡線は,

$$w(t) = G g(A) \quad (3.3.12)$$

にて表わされる。

然るに茲に得られた (3.3.12) と (3.3.9) との関係は、上述の低周波増幅器回路に於ける (3.2.9) と (3.2.5) との関係と全く類似したものであつて 3.2 の所論と其儘今の場合に適用することが出来、前と同様な意味から単一回路増幅器を単位高周波増幅器と称し、その出力たる (3.3.6) の  $g(A)$  を基本高周波出力と呼ぶとする。然し乍ら上述の基本高周波出力  $g(A)$  は (3.2.6) に定義せられた  $f(A)$  と全く別箇のものでは無く下記の関係に依つて結びつけられてゐることに注意を要する。即ち (3.3.16) より

$$g(A) = \frac{d}{dt} \int_0^t e_g(t-\tau) d\tau - \frac{d}{dt} \int_0^t e_g(t-\tau) e^{-A\tau} d\tau \quad (3.3.13)$$

然るに上式右辺の第1項は

$$\frac{d}{dt} \int_0^t e_g(t-\tau) d\tau = e_g(t) \quad (3.3.14)$$

にて、第2項は (3.2.6) に於て入力  $e_g(t)$  の代りに今の場合には入力被変調波の包絡線函数  $e_g(t)$  を採用したに過ぎない。即ち (3.2.6) の  $e_g(t)$  を被変調波の包絡線と解釈すれば

$$g(A) = e_g(t) - f(A) \quad (3.3.15)$$

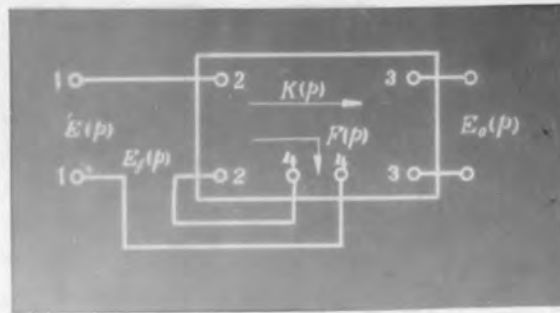
なる関係がある。従つて  $f(A)$  が既知ならば  $g(A)$  は直ちに分る筈である。

### 3.4 饋還増幅器

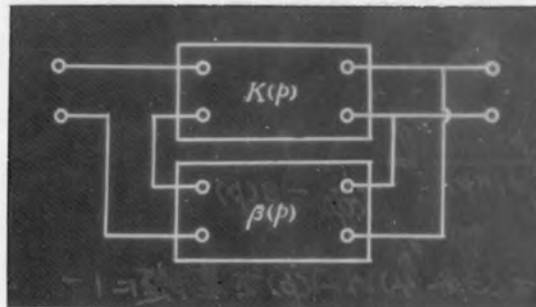
#### (A) 低周波増幅器

が 3.4.1 図に示すが如き最も一般的な饋還回路を考へ、入力を  $E_g(p)$ 、出力を  $E(p)$ 、饋還量を  $E_f(p)$  とする。端子 2-2 及び 3-3 間並びに 2-2 及び 4-4 間の傳達率

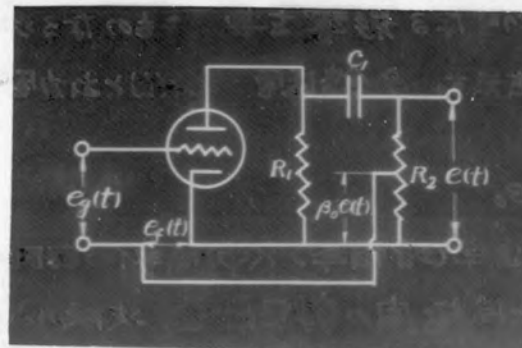




第 3 · 4 · 1 圖



第 3 · 4 · 2 圖



第 3 · 4 · 3 圖

を夫々  $K(p)$  及び  $F(p)$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \{E_g(p) + E_f(p)\} K(p) &= E(p) \\ \{E_g(p) + E_f(p)\} F(p) &= E_f(p) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

なる関係がある故、上式より  $E_f(p)$  を消去すれば

$$\frac{E(p)}{E_g(p)} = A(p) = \frac{K(p)}{1 - F(p)} \quad (3.4.2)$$

を得る。上記  $A(p)$  は立物子 1-1 及び 3-3 間の伝達率で、単位函数入力に対する出力の  $p$  函数を表へるものである。饋還が若し 3.4.2 図の如く出力を  $\beta(p)$  なる伝達率を有する回路を経て行はれる場合には

$$F(p) = K(p) \beta(p) \quad (3.4.3)$$

にて

$$A(p) = \frac{K(p)}{1 - K(p) \beta(p)} = \frac{1}{\frac{1}{K(p)} - \beta(p)} \quad (3.4.4)$$

となる。従つて (3.4.2) 或は (3.4.4) の  $A(p)$  を基礎に於て、之れに 3.2 の所論を適用すれば「良い」。

#### 【例題】 抵抗結合増幅器に於ける饋還

3.2 及び 3.4 の例題として、広帯域増幅器として最も広く使用されてゐるのは抵抗結合増幅器であるのに鑑み、その出力の一部を直接入力側に饋還せる場合に就いて、饋還が過渡特性に如何なる影響を與へるものなるかを今としよう。

3.4.3 図はその回路を示す。今饋還電圧  $E_f(t)$  と出力電圧  $e(t)$  との比を  $\beta_0$  とせば (3.4.4) 式に於て

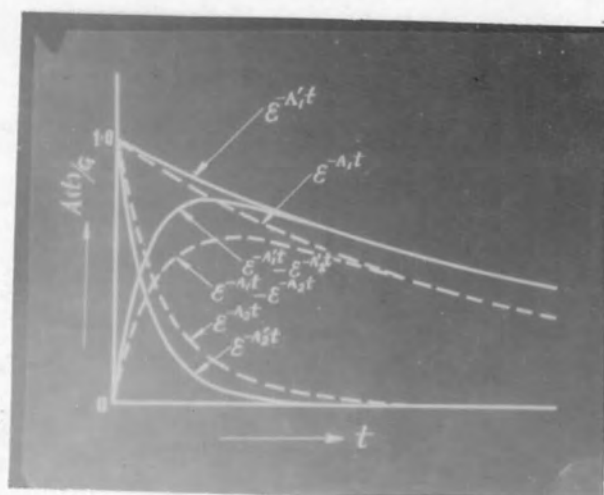
$$\beta(p) = \beta_0 \quad (3.4.5)$$

である。一方無饋還時の伝達率 (増幅率)  $K(p)$  は、等価回路を Fig. 3.1.8 図の如くに考へ  $C_2$  を以て、陽極-陰極間の静電容量、次段の入力静電容量及びその他配線間の静電容量を等価せしめる時は次の如くなる。

$$K(p) = G \left\{ \frac{p}{p+A_1} - \frac{p}{p+A_2} \right\} = G \frac{(A_2 - A_1)p}{(p+A_1)(p+A_2)} \quad (3.4.6)$$

$$\text{但し } \left. \begin{aligned} G &= -\frac{\mu R_1 R_2}{R_0^2}, \quad A_1 = \frac{R_1 + R_0}{C_1 R_0^2}, \quad A_2 = \frac{R_0^2}{R_1 R_2 R_0 C_2} \\ R_0^2 &= R_1 R_2 + R_2 R_0 + R_0 R_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.7)$$

(後述 3.6.1 表参照)  
依つて (3.4.5) 及び (3.4.6) を (3.4.4) に代入すれば、



第 3·4·4 圖

$$A(p) = \frac{1}{\frac{(p+A_1)(p+A_2)}{G(A_2-A_1)p} - \beta_0} = G' \left\{ \frac{p}{p+A_1'} - \frac{p}{p+A_2'} \right\} \quad (3.4.8)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} A_1' &= \alpha' - \beta', & A_2' &= \alpha' + \beta', & G' &= \frac{G(A_1 - A_2)}{A_1' - A_2'} \\ \alpha' &= \frac{1}{2} \{ A_1(1-\beta_t) + A_2(1+\beta_t) \}, & \beta' &= \sqrt{\alpha'^2 - A_1 A_2} \\ \beta_t &= -G\beta_0 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.9)$$

然るに今の場合  $C_1 \gg C_2$  なるを以て (3.4.7) 式より明かな如く  $A_1 \ll A_2$  なる関係がある。

従つて  $\beta_t$  の価の如何に決まる

$$\alpha' \cong \frac{A_2}{2}(1+\beta_t), \quad \beta' \cong \alpha' - \frac{A_1}{(1+\beta_t)}$$

となるを以て

$$A_1' \cong \frac{A_1}{1+\beta_t}, \quad A_2' \cong A_2(1+\beta_t) \gg A_1', \quad G' \cong \frac{G}{1+\beta_t} \quad (3.4.9)'$$

となる。扱て上式に依れば“増幅度  $G'$  は無饋還時の夫の  $1/(1+\beta_t)$  倍に減り、然るに過渡特性は如何と云ふに、無饋還時及び饋還時のインテニタル増幅率を夫々  $k(t)$  及び  $A(t)$  とせば”，(3.4.6) 及び (3.4.8) より

$$\left. \begin{aligned} k(t) &= \int_0^\infty K(p) = G(e^{-A_1 t} - e^{-A_2 t}) \\ A(t) &= \int_0^\infty A(p) = G'(e^{-A_1' t} - e^{-A_2' t}) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.10)$$

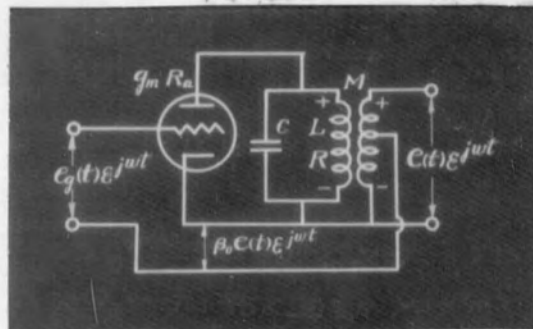
となる。この関係を四示せるのが“オ 3.4.4 図”である。即ち (3.4.9)' に示す通り小さい方の減衰率  $A_1$  は饋還に依り  $1/(1+\beta_t)$  に更に小さくなり、大きい  $A_2$  は  $(1+\beta_t)$  倍になり、その過渡現象は短時間域 (高周波特性) のみならず長時間域 (低周波特性) の特性の何れもが同時に改善される模様は図を一見すれば“明か”であらう。

#### (B) 高周波増幅器

高周波饋還増幅器に対しては、上述の低周波饋還増幅器回路と同様に (3.4.2) 或は (3.4.4) 式に依つて、 $A(p)$  を求め、之により 2.2 の所論に従つて  $\Pi(p)$  を求め、3.3 の所論を適用すれば“良い訳であるが”，包絡線解析の立場からすれば、下記の如く、最初から包絡演算子法的取扱ひをする方が良策かと思はれる。

即ち  $E_g(p)$ ,  $E(p)$  及び  $E_f(p)$  を夫々入力、出力、及び饋還電圧の包絡線の  $p$  函数と考へ、 $K(p)$  及び  $F(p)$  を夫々の端子間の包絡伝達率とせば、今の場合にも (3.4.1) の関係式が成立する事は、(2.3.5) 式より明かであらう。従つて所要の端子-1 及び 3-3 間の包絡伝達率 (包絡増幅率)  $\Pi(p)$  は (3.4.2) 式と全く同形の

$$\Pi(p) = \frac{K(p)}{1-F(p)} \quad (3.4.11)$$



第 3 · 4 · 5 圖



にて表へられることが分る。又出力を  $\beta(p)$  なる包絡伝達率を有する回路を経て饋還する事第3.4.2図の如くにする時は

$$\Pi(p) = \frac{K(p)}{1 - K(p)\beta(p)} = \frac{1}{\frac{1}{K(p)} - \beta(p)} \quad (3.4.12)$$

となり、上式は(3.4.4)式と全く同形である。斯くして得られた  $\Pi(p)$  に3.3の所論を適用すれば良い。

【例題】 以上の例題として高周波狭小帯域増幅器として最も代表的な単一回路増幅器に第3.4.5図に示す如く饋還を施した場合を取上げよう。

扱て無饋還時に於ける該増幅器の包絡伝達率  $K(p)$  は(3.3.8)式の  $\Pi(p)$  にて表へられる故(3.3.8)及び(3.3.9)式より

$$K(p) = \frac{GA}{p+A} \quad (3.4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{g_m \omega_0 M(1-j2Q)}{j2(1+j\delta)} \cong -\frac{g_m \omega_0 M Q}{1+j\delta} \\ A &= \frac{\omega_0}{2Q}(1+j\delta) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.14)$$

を得る。一方今の場合には  $\beta(p) = \beta_0$  なるを以て、所要の  $\Pi(p)$  は(3.4.12)式より

$$\Pi(p) = \frac{1}{\frac{p+A}{GA} - \beta_0} = \frac{G'A'}{p+A'} \quad (3.4.15)$$

但し

$$\beta_t = -G\beta_0 = -\frac{g_m \omega_0 M Q}{1+j\delta} \beta_0, \quad \left\{ \quad (3.4.16) \right.$$

とおけば  $A' = A(1+\beta_t), \quad G' = G \frac{A}{A'} = \frac{G}{1+\beta_t}$

i)  $M < 0$  (正饋還)

(3.4.14)及び(3.4.16)より

$$A' = \frac{\omega_0}{2Q} \left\{ 1 + g_m \omega_0 M Q \beta_0 + j \left( \delta + \frac{g_m \omega_0 M \beta_0}{2} \right) \right\} \quad (3.4.17)$$

となる故

$$-g_m \omega_0 M Q \beta_0 > 1 \quad \text{即ち} \quad -M \beta_0 > \frac{1}{g_m \omega_0 Q} = \frac{1}{\omega_0} + C R R_a \quad (3.4.18)$$

なる時  $A'$  の実数部は負となり発振する。此は衆矢の発振条件に外ならない。

ii)  $M > 0$  (負饋還)

今の場合には  $A'$  の実数部は常に正で発振することはない。のみならず  $A$  の夫に比して  $g_m \omega_0 M \beta_0 / 2$  だけ増加し、且つ虚数部も  $g_m \omega_0^2 M \beta_0 / 4Q$  だけ増加する。然し乍ら通常  $2Q$  なる

入力波 $e(t)$	過渡並に定常基本低周波出力 $f_n(A)$ 及 $f(A)$
	$\varepsilon^{-At} - \varepsilon^{-A(t-t_1)} H(t-t_1) + \Gamma(A t_0) (1 - \varepsilon^{At_0}) \varepsilon^{-At}$
	$\frac{1}{At_1} (1 - \varepsilon^{-At}) - \left( \frac{1}{At_1} + \frac{1}{At_2} \right) (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) + \frac{1}{At_2} (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1-t_2)}) H(t-t_1-t_2) \\ - \Gamma(A t_0) \left\{ \frac{1}{At_1} - \left( \frac{1}{At_1} + \frac{1}{At_2} \right) \varepsilon^{At_1} + \frac{1}{At_2} \varepsilon^{A(t_1+t_2)} \right\} \varepsilon^{-At}$
	$\frac{1}{At_1} \left\{ 1 - \varepsilon^{-At} - 2(1 - \varepsilon^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) + (1 - \varepsilon^{-A(t-2t_1)}) H(t-2t_1) - \Gamma(A t_0) (1 - \varepsilon^{At_0}) \varepsilon^{-At} \right\}$
	$\frac{1}{At_1} \left\{ 1 - \varepsilon^{-At} - (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) - \frac{1}{At_2} (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1-t_2)}) H(t-t_1-t_2) - (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1-t_2-t_3)}) H(t-t_1-t_2-t_3) \right\} \\ - \Gamma(A t_0) \left\{ \frac{1}{At_1} (1 - \varepsilon^{At_1}) - \frac{1}{At_2} (\varepsilon^{A(t_1+t_2)} - \varepsilon^{A(t_1+t_2+t_3)}) \right\} \varepsilon^{-At}$
	$\frac{1}{At_1} \left\{ 1 - \varepsilon^{-At} - (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) - (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1-t_2)}) H(t-t_1-t_2) + (1 - \varepsilon^{-A(t-2t_1-t_2)}) H(t-2t_1-t_2) \right\} \\ - \Gamma(A t_0) \left\{ 1 - \varepsilon^{At_1} (1 - \varepsilon^{A(t_1+t_2)}) \right\}$
	$\frac{1}{At_1} (1 - \varepsilon^{-At}) - \left( \frac{1}{At_1} + \frac{1}{At_2} \right) (1 - \varepsilon^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) \\ - \Gamma(A t_0) \left\{ \frac{1}{At_1} - \left( \frac{1}{At_1} + \frac{1}{At_2} \right) \varepsilon^{At_1} + \frac{1}{At_2} \varepsilon^{At_0} \right\} \varepsilon^{-At}$
	$f_n(A) = \frac{1}{At_0} (1 - \varepsilon^{-A(t+\pi-t_0)}) - \frac{1 - \varepsilon^{-(n-1)At_0}}{1 - \varepsilon^{-At_0}} \varepsilon^{-At}$ $f(A) = \frac{1}{At_0} - \frac{\varepsilon^{-At}}{1 - \varepsilon^{-At_0}}$
	$\frac{1}{At_1} \left\{ (1 - \varepsilon^{-At}) - 2(1 - \varepsilon^{-A(t-t_1)}) H(t-t_1) - \Gamma(A t_0) (1 - \varepsilon^{At_0}) \varepsilon^{-At} \right\}$
	$\frac{\varepsilon^{j\varphi}}{A+j\beta} \left[ A \varepsilon^{-At} \left\{ 1 - \varepsilon^{(A+j\beta)t_1} H(t-t_1) + \Gamma(A t_0) (1 - \varepsilon^{(A+j\beta)t_0}) \right\} + j\beta \varepsilon^{j\beta t} \{ 1 - H(t-t_1) \} \right]$
	$\frac{1}{At_1+j\pi} \left[ At_1 \varepsilon^{-At} \left\{ 1 - \varepsilon^{At_1} H(t-t_1) + \Gamma(A t_0) (1 + \varepsilon^{At_0}) \right\} + j\pi \varepsilon^{j\beta t} \{ 1 - H(t-t_1) \} \right] \\ (\beta t_1 = \pi)$

註： 上表に於ける  $\Gamma(A t_0)$  なる記号は下記の如き値を意味するものとす。

(イ) 過渡基本低周波出力  $f_n(A)$  に対しては

$$\Gamma(A t_0) = \frac{\varepsilon^{-At_0} (1 - \varepsilon^{-(n-1)At_0})}{1 - \varepsilon^{-At_0}}$$

(ロ) 定常基本低周波出力  $f(A)$  に対しては

$$\Gamma(A t_0) = \frac{\varepsilon^{-At_0}}{1 - \varepsilon^{-At_0}}$$

値は1に比して相当大なるを以て実数部の増大に<sup>比</sup>て虚数部の変化は極めて小さく、  
過渡特性が改善される。然し此の場合利得は(3.4.16)より明かなる如く

$$\frac{1}{|1+\beta\pm|} = \frac{\sqrt{1+\delta^2}}{\sqrt{(1+g_m\omega_0 M Q \beta_0)^2 + \delta^2}}$$

に減りおる事はふい返もない。

### 3.5 種々なる周期的衝撃波に対する基本出力波

#### (A) 基本低周波出力

前述せる如く入力  $E_g(t)$  に対する基本低周波出力  $f(A)$  は(3.2.6)式に依り次式で計算される。

$$f(A) = \oint_0^p \frac{p}{p+A} E_g(p) = \frac{d}{dt} \int_0^t E_g(t-\tau) E^{-A\tau} d\tau \quad (3.5.1)$$

従つて若し入力  $E_g(t)$  が(1.1.3)図に示す如く  $R(t)$  の  $0 < t < t_1$  なる区間のみを切取つた  
衝撃波が  $t_0$  なる周期を以て繰返されるが如きものであれば、 $n$  周期目の出力は  
(1.1.12)に依り

$$f_n(A) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t R(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (3.5.2)$$

にて算定せられる。但し今の場合には  $A(t) = \oint_0^p p/(p+A) = E^{-At}$  なるを以て(1.1.10)式より

$$S_n(\tau) = E^{-A\tau} H(\tau) + \frac{E^{-At_0}(1-E^{-(n-1)At_0})}{1-E^{-At_0}} E^{-A\tau} \quad (3.5.3)$$

一方定常基本出力波は(1.1.13)及び(1.1.14)より

$$f_\infty(A) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t R(t-\tau) S(\tau) d\tau \quad (3.5.4)$$

$$S(\tau) = E^{-A\tau} H(\tau) + \frac{E^{-At_0}}{1-E^{-At_0}} E^{-A\tau} \quad (3.5.5)$$

にて計算される。

※3.5.1表は種々の周期的衝撃波に対する過渡並びに定常基本低周波出力を夫  
々(3.5.2)式及び(3.5.4)式に依り計算した結果を示すものである。\*

表中、矩形波及び二等辺三角波に対する定常基本出力波は夫々(3.1.16)及び  
(3.1.16)式に定義せられた  $R(A)$  及び  $T(A)$  に外ならない。然して、之等の基本出力波中  
 $f(A t_0)$  を含む項は、該周期以前に入来せる信号に依つて誘起せられた現象を示すもので  
前起せるが如く出力波の零電位の変動を決定する項である。

\* 1列目は「入力波」二等辺三角波なる場合には

$$R(t) = \frac{1}{t_1} [t - 2(t-t_1)H(t-t_1) + (t-2t_1)H(t-2t_1)]$$

となり  $R(t)$  は波動性函数を含む故第1章 1.3 注意.3 参照の事

## (B) 基本高周波出力

今の場合単位跳躍函数振幅を有する高周波入力  $H(t)E^{j\omega t}$  に対応する基本出力波の伝達線  $u(t)$  は (3.3.6) より明かな如く,

$$u(t) = \tilde{\omega} \frac{A}{p+A} = (1-E^{-At}) \quad (3.5.6)$$

となる故、入力が (2.5.1) 図に示す  $n$  個の周期的被変調波なる場合の  $n$  周期目<sup>的</sup>に於ける過渡基本高周波出力は (2.5.2) 式より

$$g_n(A) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\tau) S_n(\tau) d\tau \quad (3.5.7)$$

然るに今の場合には (2.5.3) と (3.5.6) 式より

$$S_n(\tau) = (1-E^{-A\tau})H(\tau) + (n-1) - \frac{E^{-At_0}(1-E^{-(n-1)At_0})}{1-E^{-At_0}} E^{-A\tau} \quad (3.5.8)$$

或は 1.3 の注意 1 に依れば、上式中常數項  $(n-1)$  は省略して差支へないから

$$S_n(\tau) = (1-E^{-A\tau})H(\tau) - \frac{E^{-At_0}(1-E^{-(n-1)At_0})}{1-E^{-At_0}} E^{-A\tau} \quad (3.5.8)'$$

なる式を採用して差支へない。

従つて、定常基本高周波出力は

$$g(A) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\tau) S(\tau) d\tau \quad (3.5.9)$$

$$S(\tau) = (1-E^{-A\tau})H(\tau) - \frac{E^{-At_0}}{1-E^{-At_0}} E^{-A\tau} \quad (3.5.10)$$

にて計算せらる。

然し乍ら (3.5.8)' 式を

$$\left. \begin{aligned} S_n(\tau) &= H(\tau) - S'_n(\tau) \\ S'_n(\tau) &= E^{-A\tau} H(\tau) + \frac{E^{-At_0}(1-E^{-(n-1)At_0})}{1-E^{-At_0}} E^{-A\tau} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.8)''$$

と表わせば

$$g_n(A) = \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\tau) H(\tau) d\tau - \frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\tau) S'_n(\tau) d\tau \quad (3.5.7)'$$

然るに 1.3 の注意 2 を参照すれば、上式右辺の第 1 項は

$$\frac{d}{dt} \int_{t-t_1}^t k(t-\tau) H(\tau) d\tau = k(t) \{1-H(t-t_1)\}$$

であり、第 2 項は (3.5.8)'' の  $S'_n(\tau)$  が (2.5.3) の  $S_n(\tau)$  と全く同じ値なるを以て、 $f_n(A)$  と



第3.6.2表

回路位置	名称	回路図	II(p) の $A_i$ 及び $G_i$ の値			備考
			$A_i$	$G_i$ ( $\Pi(p) = \sum \frac{G_i A_i}{p + A_i}$ の時)	$G$ ( $\Pi(p) = G \prod \frac{A_i}{p + A_i}$ の時)	
1	単一回路		$A = \frac{\omega_0}{2Q} (1 + j\delta)$	$G = -\frac{g_m \omega_0 M Q}{1 + j\delta}$	左に同じ	$Q = Q_0$ $\delta = 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ この両者の $\Pi(p)$ は外に非 振動減衰項が"含まれる"かとの 判別は $\delta$ と $\omega$ の関係より $Q=1$ に 対して $\delta > 1$ なら減衰項あり、 $\delta < 1$ なら減衰項なし。
				$G = -\frac{g_m \omega_0 L_0 Q}{1 + j\delta}$	左に同じ	
2	結合回路		$A_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \{1 + j(\delta - b)\}$	$G_1 = -\frac{g_m \omega_0 \sqrt{L_1 L_2} Q}{2 \{1 + j(\delta - b)\}}$	$G = \frac{j g_m \omega_0 \sqrt{L_1 L_2} b Q}{(1 - \delta^2 + b^2 + j 2\delta)}$	$b = R Q$ $Q = Q_1 = Q_2$ $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$ $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$
				$G_2 = \frac{g_m \omega_0 \sqrt{L_1 L_2} Q}{2 \{1 + j(\delta + b)\}}$		$k = C_m / \sqrt{C_1 C_2}$
	二離調回路			$G_1 = j \frac{g_1 g_2 \omega_0^2 M_1 M_2 Q^2}{2 b \{1 + j(\delta - b)\}}$ $G_2 = -j \frac{g_1 g_2 \omega_0^2 M_1 M_2 Q^2}{2 b \{1 + j(\delta + b)\}}$	$G = \frac{g_1 g_2 \omega_0^2 M_1 M_2 Q^2}{1 - \delta^2 + b^2 + j 2\delta}$	$b = Q \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_0}$
3	三離調回路		$A_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \{2 + j\delta\}$ $A_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \{1 + j(\delta + b)\}$	$G_1 = -\frac{g_0 g_1 g_2 \omega_0^3 M_0 M_1 M_2 Q^3}{(2 + j\delta)(1 + b^2)}$ $G_2 = -j \frac{g_0 g_1 g_2 \omega_0^3 M_0 M_1 M_2 Q^3}{2 b \{1 + j(\delta + b)\} \{1 - j b\}}$ $G_3 = j \frac{g_0 g_1 g_2 \omega_0^3 M_0 M_1 M_2 Q^3}{2 b \{1 + j(\delta - b)\} \{1 + j b\}}$	$G = \frac{-g_0 g_1 g_2 \omega_0^3 M_0 M_1 M_2 Q^3}{(2 + j\delta)(1 - \delta^2 + b^2 + j 2\delta)}$	$Q = Q_1 = Q_2 = 2Q_0$ $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
	組合せ回路		$A_3 = \frac{\omega_0}{2Q} \{1 + j(\delta - b)\}$	$G_1 = -j \frac{g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} b Q^2}{(2 + j\delta)(1 + b^2)}$ $G_2 = \frac{g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} Q^2}{2 \{1 + j(\delta + b)\} \{1 - j b\}}$ $G_3 = -\frac{g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} Q^2}{2 \{1 + j(\delta - b)\} \{1 + j b\}}$	$G = -j \frac{g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} b Q^2}{(2 + j\delta)(1 - \delta^2 + b^2 + j 2\delta)}$	$k = M / \sqrt{L_1 L_2}$ $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$ $A = R Q$



第3-6-1表

増幅器回路	等価回路	回路数	$A_i$	$G_i$ [(2.1.3)式]	備考
抵抗結合増幅器		1	$A_1 = \frac{R_1 + R_a}{C_1 R_o^2}$	$G_1 = \frac{-\mu R_1 R_2}{R_o^2}$	$R_o^2 = R_1 R_2 + R_2 R_a + R_a R_1$
		2	$A_1 = \frac{R_1 + R_a}{C_1 R_o^2}$ $A_2 = \frac{R_o^2}{R_1 R_2 R_a C_1} \gg A_1$	$G_1 = \frac{-\mu R_1 R_2}{R_o^2}$ $G_2 = -G_1$	
4コイル結合並に無変増幅器		2	$A_1 = \frac{R_1 + R_a}{C_1 R_o^2 + L}$ $A_2 = \frac{L + C_1 R_o^2}{L C_1 (R_2 + R_a)} \gg A_1$	$G_1 = \frac{-\mu C_1 R_2 (C_1 R_o^2 - L R_a)}{(C_1 R_o^2 + L)^2}$ $G_2 = \frac{-\mu R_2 (L + C_1 R_2 R_a)}{(R_2 + R_a) (L + C_1 R_o^2)}$	
		3	$A_1 = \frac{R_1 + R_a}{L + C_1 R_o^2}$ $A_2, A_3 = \alpha \pm j\beta$ $\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_a} \right) + \frac{R_1}{L} \right\}$ $\beta = \sqrt{\frac{L + C_1 R_o}{L C_1 C_2 R_a R_2}} - \alpha^2$	$G_i = \frac{\mu (A_i - F_i)}{C_2 R_a (A_i - A_j)(A_i - A_k)}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ $(i \neq j \neq k \neq i)$	
変圧器結合増幅器		1	$A_1 = \frac{R_a + R_1}{L_1}$	$G_1 = -\mu n$	$L_1$ は一次の実効インダクタンスを意味する
		3	$A_1 = \frac{R'}{L_o + C_e R_e R'}$ $A_2, A_3 = \alpha \pm j\beta$ $\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{L_e} (R' + R_e) + \frac{C_e R_e (R')^2}{L_o (L_o + C_e R_e R')} \right\}$ $\beta = \sqrt{\frac{L_o + C_e R_e R'}{L_e L_o C_e}} - \alpha^2$	$G_i = \frac{-\mu n R_o}{L_e C_e (R_a + R_o) (A_i - A_j)(A_i - A_k)}$ $R' = \frac{R_a R_o}{R_a + R_o}$	$L_1, L_2$ は一次及び二次の実効インダクタンスを意味する

なる事が分る。故に過渡出力は

$$g_n(A) = k(t) \{ 1 - H(t-t_0) \} - f_n(A) \quad (3.5.7)''$$

同様に定常出力は

$$g_\infty(A) = k(t) \{ 1 - H(t-t_0) \} - f_\infty(A) \quad (3.5.9)'$$

にて計算せられるを以て (3.5.7) 或は (3.5.9) なる計算を施行する迄も亦 3.5.1 表の結果を利用すれば、搬送波が周期  $t_0$  の値に無関係に連続でその包絡線が夫々 3.5.1 表に示すが如き波形を有する高周波入力に対する包絡基本高周波出力を直ちに計算する事が出来る。

次に入力が 3.5.3 図に示すが如き周期的被変調波なる時と全く同様にて (3.5.7) 及び (3.5.9) の関係を導くが、今の場合には  $S_0(t)$  及び  $S(t)$  とでは亦一種周期的包絡インデシヤル量を採用すべきで、(3.5.6)、(3.5.9) 及び 1.3 注意 1 より

$$\left. \begin{aligned} S_0(t) &= (1 - e^{-At})H(t) + \frac{e^{-Bt_0}(1 - e^{-(A+B)t_0})}{1 - e^{-Bt_0}} e^{-At} \\ S(t) &= (1 - e^{-At})H(t) + \frac{e^{-Bt_0}}{1 - e^{-Bt_0}} e^{-At} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.11)$$

$$B = A + j\omega$$

となる。従つて今の場合にも (3.5.7)'' 及び (3.5.9)' の関係が成立するか、此の場合の  $f_n(A)$  及び  $f_\infty(A)$  とでは、亦 3.5.1 表に於て  $\Gamma(A t_0)$  の代りに  $\Gamma(B t_0)$  となす可きは言ふ事はない。

### 3.6 代表的増幅器の $G_i$ 及び $A_i$ の値並びに回路位数の定義

以上の所論に従へば、低周波並びに高周波何れにせよ、單段増幅器の周期波増幅特性のみならず、一般過渡特性は各増幅器の  $G_i$  及び  $A_i$  が分れば、それか低周波増幅器ならば (3.2.5) 式より、一方高周波増幅器ならば (3.3.5) 式より直ちに所要の解を得るを以て、その数学的取扱法は極めて簡便となる。

斯る見地から最も屢に用ひられる代表的回路の二に就て、 $G_i$  及び  $A_i$  を求めた結果を 3.6.1 表及び 3.6.2 表に示す。但し前者は低周波増幅器に対するもので、表中の  $G_i$  は (3.2.3) 式に依つて定義された値であり、後者は高周波増幅器に対するもので、此の場合の  $G_i$  なる値は (3.3.3) 式で定義された値である事は云ふまでもない。

然に低周波増幅器にても高周波増幅器にても、(3.2.5) 及び (3.3.5) 式が明かな如く一般に基本出力を  $F(A)$  とせば、出力  $\varphi(t)^*$  は

\* 茲に云ふ出力とは高周波回路の場合には出力の波形即ち包絡線を指す事は云ふ迄もない。

$$\varphi(t) = \sum_i G_i F(A_i)$$

(3-6-1)

なる形に統一的に表現せらる。<sup>\*</sup> 従つて上式の右辺の項数即ち $i$ の数の相等しい2つの増幅器は解析的に表現からすれば“同一形式”を取る。斯る意味に於て便宜上 $i=1, 2, \dots, n$ なる回路を總称して $n$ 位回路或は單に $n$ 回路と呼称する事としよう。表中回路位数なる欄は其ける $n$ の値を示すのである。

---

\* 低周波増幅器回路に於ける $G_0$ 及び高周波増幅器回路に於ける $G_{\infty}$ なる値は前述せるか如く通常零なるを以て茲には省略してある。

## 第4章 低周波多段増幅器の過渡現象と周期的信号波増幅特性<sup>(1)</sup>

### 4.1 序説

従来多段増幅器の過渡現象は、該回路を炉波振回路と考へ、周波数特性並びに位相特性を仮定して論ぜられてゐる。然し乍ら斯る周波数特性並びに位相特性を現在解析の可能な範囲で出来るが、実際の回路に近似せしめて得られる過渡現象は、最近に於ける電視或は時分割多重通信の要求には尚近似度が不十分で、單に大体的見当を與へるに過ぎない。従つて我々としては斯る方法に依つて得られた見当に従つて具體的回路を定め、その回路の個々に就いて嚴密な過渡現象を計算する必要に迫られてゐる。

然るに従来此の方面に關する研究は比較的僅少で、以下論ぜんとする低周波多段増幅器に關するものとしては、筆者等<sup>(2)</sup>に於いて、僅かに三の文獻を知るに過ぎない。即ち M. H. Lane<sup>(10)</sup> 及び K. W. Wagner<sup>(11)</sup> の抵抗結合増幅器に關する研究は、前者は微分方程式を正確に解いたものであり、後者は演算子法に取扱つてゐる。又 A. V. Bedford 及び G. L. Frendall 両氏<sup>(12)</sup> は補償型抵抗結合増幅器に就いて特に段數が數十段と云つたやうな極めて多い場合に就いて研究したもので、その解析法は Fourier 級數法を巧みに使用してインデシヤル出力を計算したものである。然し該解析法は段數が極めて多く、周波数特性に於ける遮断特性が非常に急激な場合には充分精度もあり、実用的にも採用されるが、段數が少く周波数特性の遮断がゆるやかで長く裾を引く場合には解析法そのものに充分の検討を要する。

筆者等は斯る従来の研究の現状並びに、特に最近周期波増幅特性が「時分割多重通信の向題」に關聯して重要性を大した英に金鑑み、第1章に述べせる解析法を適用して多段増幅器の過渡現象並びに周期波増幅特性を出来るが体系的に且つ一般的に論じ、併せて第1編第3章及び第5章に得られた解析結果を再検討せんとするものである。

### 4.2 1回路増幅器の解析

1回路増幅器のインデシヤル増幅率の $\rho$ 函數はその定義に依り、一般に次の如く表す事が出来る。



$$G(p) = G_0^{-1} A(t) = \frac{Gp}{p+A} \quad (4.2.1)$$

斯る演算子形を有する回路としては、表3.6.1表より明かた如く、抵抗結合増幅器並びに理想変圧器結合増幅器を挙げることが出来る。

又て同一の  $G$  及び  $A$  を有する  $m$  段増幅器のインディシャル増幅率は式(4.2.1)より

$$G(p) = G_0^{-1} A(t) = G^m \left( \frac{p}{p+A} \right)^m \quad (4.2.2)$$

となる。従つて

$$A(t) = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{ A^{m-1} E^{-At} \} \quad (4.2.3)$$

$$= G^m E^{-At} L_{m-1}(At) \quad (4.2.3)'$$

茲に  $L_{m-1}(At)$  は  $m-1$  階の Laguerre の多項式<sup>(13)</sup> にて

$$\left. \begin{aligned} L_{m-1}(At) &= \frac{1}{(m-1)!} E^{At} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{ A^{m-1} E^{-At} \} \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{m-1}{\nu} \frac{(-At)^\nu}{\nu!} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

以上の結果は前述の H. M. Lane 及び H. W. Wagner が抵抗結合増幅器に就いて得たものに外ならない。

依つて入力  $e_g(t)$  なる場合の出力は相乗定理 (1.1.1) 式と (4.2.3) 式より

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t A(t-\tau) e_g(\tau) d\tau \\ &= \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{ A^{m-1} E^{-A(t-\tau)} \} e_g(\tau) d\tau \\ &= \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ A^{m-1} \frac{d}{dt} \int_0^t E^{-A(t-\tau)} e_g(\tau) d\tau \right\} \quad (4.2.5) \end{aligned}$$

然るに、基本低周波出力を  $f(A)$  とおけば (3.2.6) 式に依れば

$$f(A) = \frac{d}{dt} \int_0^t E^{-A(t-\tau)} e_g(\tau) d\tau \quad (4.2.6)$$

なるを以て

$$e(t) = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{ A^{m-1} f(A) \} \quad (4.2.7)$$

となる。従つて若し入力  $e_g(t)$  が周期的衝撃波なる場合には、上式の  $f(A)$  を (3.5.2), (3.5.4) 式 或は表3.5.1表の値を代入すれば、所要の過渡並びに定常出力が得られる。



例へば“入力”が周期的矩形波なる場合の定常基本出力は  $\omega \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1$  素及び“ $\omega$  I 篇 (3.1.16)<sub>a</sub>”より  $R(A)$  となるから

$$e(t) = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{ A^{m-1} R(A) \} \quad (4.2.8)_a$$

となり、一方入力が周期的二等辺三角波の場合には定常基本出力は  $\omega \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1$  素及び“ $\omega$  I 篇 (3.1.16)<sub>b</sub>”式より  $T(A)$  にて表へられるから

$$e(t) = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{ A^{m-1} T(A) \} \quad (4.2.8)_b$$

となる。 $\omega$  I 篇 (5.3.11)<sub>a</sub> 及び (5.3.11)<sub>b</sub> は以上の特殊な場合以外ならない。

#### 4.3 1 回路増幅器の周期的インデシャル増幅率

前節に於て 1 回路多段増幅器の過渡現象並びに周期的信号波に対する出力の解析法を述べたが、 $\omega$  2 に就て述べる如く、周期的入力に対する出力の諸特性を左右するものは周期的インデシャル量であり、特に出力を関式向々に表せんとする場合には之を曲線に表す必要がある。更に周期的インデシャル量は  $\omega$  1.2.2 図に示すが如き段階的に単位量づゝ飛躍する入力に対する出力なるを以て、 $t_0 = 00$  なる特別の場合を考へれば、直ちに  $\omega$  1.1.1 図に示すが如き単位跳躍入力に対する出力即ち所謂過渡現象を導くことになる。

依つて以下 1 回路増幅器の周期的増幅率の諸特性を吟味しよう。即ち今の場合には (4.2.3) 式と (1.1.12) 及び (1.1.14) 式より

周期的過渡インデシャル増幅率は

$$S_n(\tau) = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} [A^{m-1} \varphi_n(A\tau)]$$

周期的定常インデシャル増幅率は

$$S(\tau) = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} [A^{m-1} \varphi(A\tau)]$$

(4.3.1)

但し

$$\varphi_n(A\tau) = E^{-A\tau} H(\tau) + \frac{E^{-At_0} (1 - E^{-(m-1)At_0})}{1 - E^{-At_0}} E^{-A\tau}$$

$$\varphi(A\tau) = E^{-A\tau} H(\tau) + \frac{E^{-At_0}}{1 - E^{-At_0}} E^{-A\tau}$$

(4.3.2)

然し乍ら  $S_n(\tau)$  及び  $S(\tau)$  を曲線に描く目的には、上言ふの如く微分演算を含む形式は不適当で之等の微分演算を実際にも施行する必要がある。

尚實際問題として過渡状態よりは寧ろ定常状態が問題となる場合が多いので、

以下問題を  $S(\tau)$  に限定する事とするが、過渡状態についても全く同様にしては良い。

次に (4.3.2) の  $\varphi(A\tau)$  の右辺の各項を (4.3.1) 式に代入するに

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{A^{m-1} \varepsilon^{-A\tau}\} = \varepsilon^{-A\tau} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{m-1}{m-1} C_{\lambda} \frac{(-A\tau)^{\lambda}}{\lambda!} \quad (4.3.3)$$

一方 附録 3 の計算に依れば

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ A^{m-1} \frac{\varepsilon^{-At_0}}{1-\varepsilon^{-At_0}} \varepsilon^{-A\tau} \right\} \\ = \varepsilon^{-A\tau} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{(-A\tau)^{\lambda}}{\lambda!} \left\{ \sum_{l=0}^{m-\lambda-1} \frac{m-1}{m-1} C_{\lambda+l} (-At_0)^l B_l(At_0) \right\} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

但し

$$B_l(At_0) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^{-At_0}}{1-\varepsilon^{-At_0}} & l=0 \\ \varepsilon^{At_0} \sum_{\lambda=1}^l \frac{\lambda!}{l!} C_{\lambda} \left( \frac{\varepsilon^{-At_0}}{1-\varepsilon^{-At_0}} \right)^{\lambda+1} & l \neq 0 \end{cases} \quad (4.3.5)$$

$$C_j^i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i>j \\ \begin{cases} 1 & (i=1) \\ C_{j-1}^{i-1} + C_{j-1}^i \times i & (i \geq 2) \end{cases} & i < j \end{cases} \quad (4.3.6)$$

従つて (4.3.3) 及び (4.3.4) 式より

$$S(\tau) = G^m S'(\tau)$$

$$S'(\tau) = \varepsilon^{-A\tau} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \left[ \frac{m-1}{\lambda!} C_{\lambda} (-A\tau)^{\lambda} \left\{ H(\tau) + \sum_{l=0}^{m-\lambda-1} \frac{m-1}{m-1} C_{\lambda+l} (-At_0)^l B_l(At_0) \right\} \right] \quad (4.3.7)$$

を得る。上式が所要の周期的定常インテンシャル増幅率である。

次に前述せるが如く (4.3.7) 式に於て  $t_0 = \infty$  とおけば、単位跳躍函数入力に対する出力を算する筈で、試みに之を求むるに (4.3.4) 及び (4.3.5) より明かほしく

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} (-At_0)^l B_l(At_0) = 0 \quad (4.3.8)$$

なるを以て

$$S(\tau)_{t_0=\infty} = G^m \varepsilon^{-A\tau} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{m-1}{\lambda!} C_{\lambda} (-A\tau)^{\lambda} H(\tau) = G^m \varepsilon^{-A\tau} L_{m-1}(A\tau) H(\tau) \quad (4.3.9)$$

となり (4.2.3)' 式に一致する。以上の事から次の様に結論する事が出来る。即ち (4.3.7) 式  $S'(\tau)$  の右辺の中  $H(\tau)$  を含む項は考察中の周期の初期に入力が

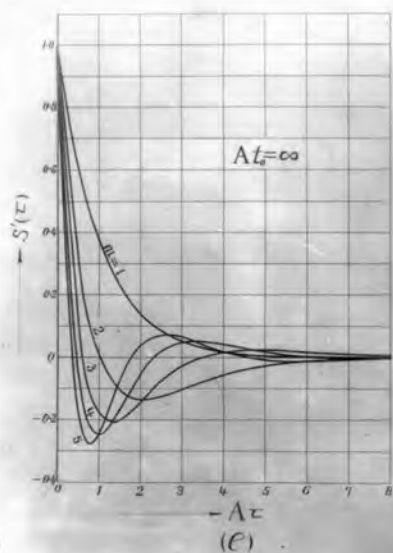
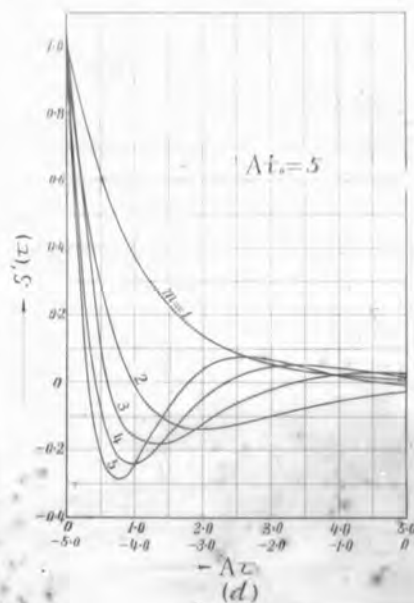
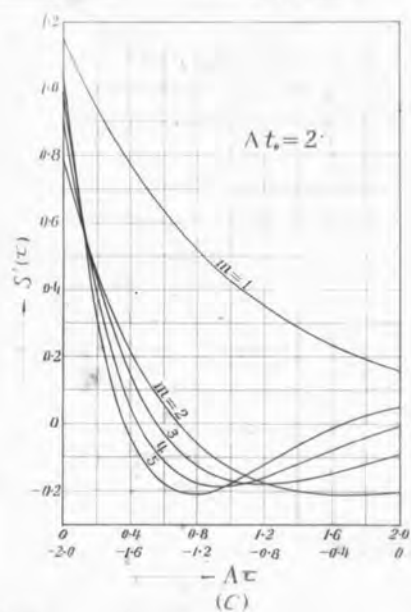
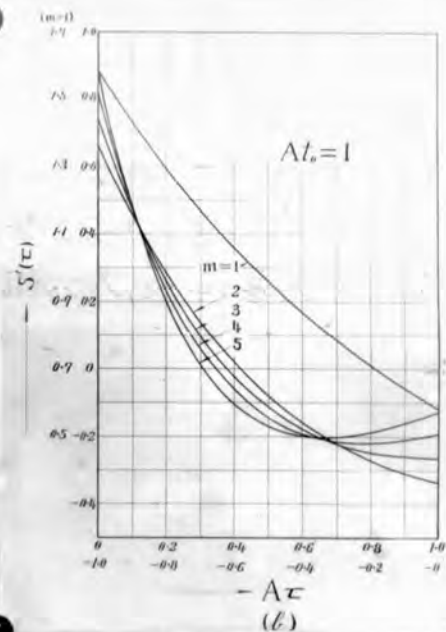
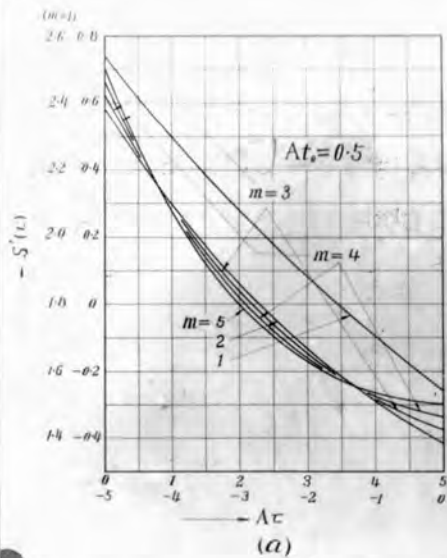
(a)  $At_0 = 0.1$

$At \backslash m$	1	2	3	4	5
0	10.5083	0.5167	0.5250	0.5333	0.5417
0.01	10.4038	0.4075	0.4111	0.4147	0.4183
0.02	10.3003	0.3004	0.3005	0.3006	0.3006
0.03	10.1978	0.1955	0.1931	0.1907	0.1882
0.04	10.0963	0.0926	0.0888	0.0850	0.0811
0.05	9.9958	-0.0083	-0.0125	-0.0166	-0.0207
0.06	9.8964	-0.1072	-0.1107	-0.1143	-0.1177
0.07	9.7979	-0.2041	-0.2061	-0.2080	-0.2097
0.08	9.7004	-0.2991	-0.2985	-0.2979	-0.2971
0.09	9.6039	-0.3922	-0.3881	-0.3841	-0.3799
0.10	9.5083	-0.4833	-0.4750	-0.4667	-0.4583

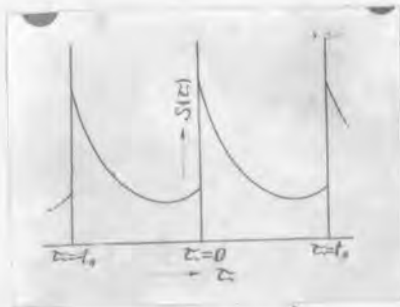
(b)  $At_0 = 0.2$

$At \backslash m$	1	2	3	4	5
0	5.5167	0.5333	0.5499	0.5664	0.5829
0.02	5.4074	0.4146	0.4215	0.4281	0.4344
0.04	5.3003	0.3004	0.3001	0.2994	0.2985
0.06	5.1954	0.1905	0.1854	0.1799	0.1743
0.08	5.0925	0.0849	0.0771	0.0692	0.0612
0.10	4.9917	-0.0166	-0.0249	-0.0331	-0.0413
0.12	4.8928	-0.1142	-0.1210	-0.1276	-0.1340
0.14	4.7960	-0.2078	-0.2113	-0.2145	-0.2174
0.16	4.7010	-0.2977	-0.2961	-0.2942	-0.2920
0.18	4.6079	-0.3840	-0.3756	-0.3670	-0.3583
0.20	4.5167	-0.4667	-0.4501	-0.4336	-0.4171

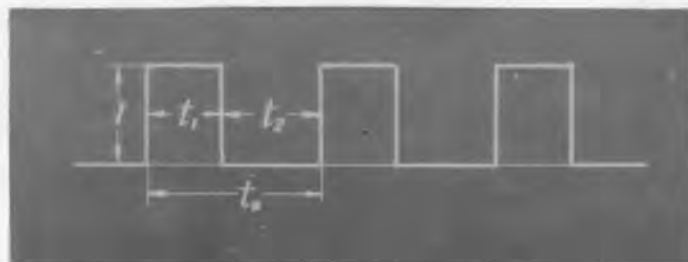
第 4.3.1 表  $S'(\pi)$  の値



第4.3.2圖



第4.3.1圖



第4.3.3圖

単位量飛躍した為に発生する現象。換言すれば、該周期の初期に新入に到来せる単位飛躍入力に依つて発生する現象であり、一方 $(-At_0)^l B_l(At_0)$ を含む項は該周期以前に加へられた階段の入力に依つて発生せる現象 $l=1$ で、入力が周期的なる為の出力の特性を決定するものである。従つて $(At_0)^l B_l(At_0) \cong 0$  なる如きものを周期とする周期的入力に対する出力は、単一孤立波入力に対する出力と本質的な相違はなく、入力の周期性の影響は多くの場合考慮するに及ばない。

尚上記の $S(\tau)$ の数値計算には下記の関係を利用すれば甚だり便利である。即ち(1.1.13)式より明かな如く、 $\tau$ なる変数の領域は高々 $-t_0 \leq \tau \leq t_0$

である。然るに $\tau > 0$ に対しては $H(\tau) = 1$ なるを以て(4.3.2)及び(4.3.1)式より

$$S(\tau)_{\tau > 0} = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ A^{m-1} \frac{e^{-A\tau}}{1 - e^{-At_0}} \right\} \quad (4.3.1)'$$

であり、一方 $\tau < 0$ に対しては $H(\tau) = 0$ なるを以て

$$S(\tau)_{\tau < 0} = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ A^{m-1} \frac{e^{-A(t_0+\tau)}}{1 - e^{-At_0}} \right\} \quad (4.3.1)''$$

$$= S(t_0 + \tau)_{t_0 + \tau > 0} \quad (4.3.10)$$

なる関係がある。即ち $\tau = 0 \sim -t_0$ に対応する $S(\tau)$ の値は $\tau = t_0 \sim 0$ に対応する $S(\tau)$ の値に全く合致し、Fig. 4.3.1 図に示すかゝる関係を有する。即ち $S(\tau)$ は $t_0$ を周期とする周期函数である。この事は $S(\tau)$ が定常出力で一周期毎に同じ状態を繰返へる事から、物理学的には当然の帰結である。従つて $S(\tau)$ の数値計算は $\tau = 0 \sim t_0$ なる範囲について行へば充分で、之れより直ちに $\tau = 0 \sim -t_0$ に対する $S(\tau)$ が分る。Fig. 4.3.2 図は種々の $At_0$ の値に対する $S'(\tau)$ の値を示すもので、Fig. 4.3.1 表は $At_0$ が0.1 及び0.2 なる時の $S'(\tau)$ の数値を表示したものである。今の場合 $S'(\tau)$ が直線的なる程出力波形の歪は小さく、 $At_0$ の値が小なる程忠実な増幅が出来る訳である。

次に上述の周期的インデシャル増幅率 $S_n(\tau)$ 及び $S(\tau)$ の一利用例として、入力が此の種のものとしては最も基本的な周期的矩形波なる時の多段1回路増幅器の定常出力の性復を吟味しよう。

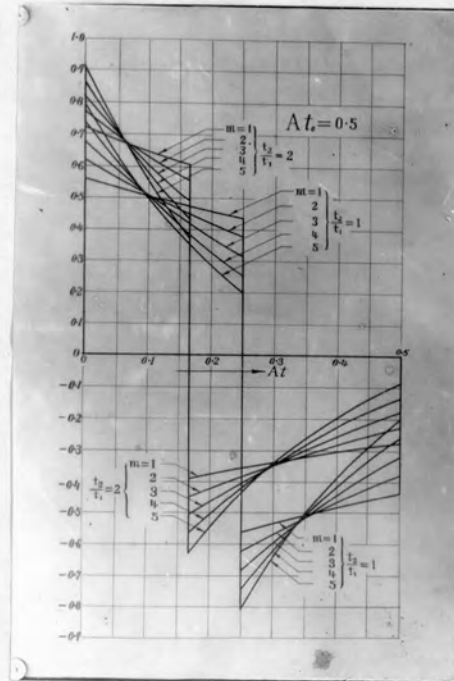
扱てFig. 4.3.3 図に示す周期的矩形波に対しては、(1.1.12)及び(1.1.13)式に於て $f(t) = 1$ と見做せば良いから

$$\text{過渡出力は: } e_n(t) = S_n(t) - S_n(t - t_1) \quad (4.3.11)_a$$

$$\text{定常出力は: } e(t) = S(t) - S(t - t_1) \quad (4.3.11)_b$$

にて與へられる。或は上式に夫々(4.3.1)及び(4.3.2)を代入する時は





第 4 · 3 · 4 圖

$$\left. \begin{aligned} e_n(t) &= \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{ A^{m-1} R_n(A) \} \\ e(t) &= \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \{ A^{m-1} R(A) \} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.12)$$

$$\left. \begin{aligned} R_n(A) &= e^{-At} - e^{-A(t-t_1)} H(t-t_1) - \frac{(1-e^{-A t_1}) e^{-A t_1} (1-e^{-A t_1})}{(1-e^{-A t_1})} e^{-At} \\ R(A) &= e^{-At} - e^{-A(t-t_1)} H(t-t_1) - \frac{e^{-A t_1} (1-e^{-A t_1})}{1-e^{-A t_1}} e^{-At} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.13)$$

上記の結果は既に(4.3.7)式に求めた處と一致する。然し(4.3.11)a及び(4.3.11)b式に依れば、今の場合の本力は、 $S_n(t)$  或は  $S(t)$  の図形が分つて居れば、之とその時間座標を右にずらせたものとの差として與へられる。亦4.3.4図は亦4.3.2図(a)より斯う方法にて求めた定常本力の一列を示すものである。

次に今の場合の本力波形の歪みと増幅器の段数との關係を、簡單の爲に、定常本力に就いて考察する。今歪の程度を表す一つの規準として  $t=+0$  に於ける本力の切線の方角を求めて見るに(4.3.11)式より

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=+0} = \left. \frac{dS(t)}{dt} \right|_{t=+0} - \left. \frac{dS(t-t_1)}{dt} \right|_{t=+0} \quad (4.3.14)$$

然るに(4.3.7)式より

$$\left. \frac{dS(t)}{dt} \right|_{t=+0} = -G^m A \left[ m + \sum_{l=0}^{m-1} m C_{l+1} (-A t_0)^l B_l(A t_0) \right] \quad (4.3.15)$$

$$\left. \frac{dS(t-t_1)}{dt} \right|_{t=+0} = -G^m A \left[ e^{A t_1} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(A t_1)^s}{s!} \left\{ \sum_{l=0}^{m-s-1} m C_{l+s+1} (-A t_0)^l B_l(A t_0) \right\} \right] \quad (4.3.16)$$

$$\text{或は} \quad = -G^m A \left[ \sum_{l=0}^{m-1} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(A t_1)^s}{s!} m+s C_{l+s+1} \right\} (-A t_0)^l B_l(A t_0) \right] \quad (4.3.16)'$$

従つて

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=+0} = -G^m A \left[ m + \sum_{l=0}^{m-1} m C_{l+1} (-A t_0)^l B_l(A t_0) - e^{A t_1} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(A t_1)^s}{s!} \left\{ \sum_{l=0}^{m-s-1} m C_{l+s+1} (-A t_0)^l B_l(A t_0) \right\} \right] \quad (4.3.17)$$

$$\text{或は} \quad = -G^m A \left[ m - \sum_{l=0}^{m-1} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(A t_1)^s}{s!} m+s C_{l+s+1} \right\} (-A t_0)^l B_l(A t_0) \right] \quad (4.3.17)'$$

一方  $S(t)$  は  $t_0$  を周期とする周期函数なるを以て

$$\frac{dS(t-t_1)}{dt} = \frac{dS(t+t_0)}{dt}$$

なる関係ある事を利用すれば(4.3.17)式に対応して次式を得る。

$$\left. \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = -G^m A \left[ m + \sum_{l=0}^{m-1} m C_{l+1} (-At_0)^l B_l(At_0) - e^{-At_0} \left\{ \sum_{l=0}^{m-1} m C_{l+1} \frac{(-At_0)^l}{l!} \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{m C_{l+1}}{m C_{l+1}} (-At_0)^l B_l(At_0) \right\} \right\} \right] \quad (4.3.17)''$$

$A$ が極めて小さい時は数値計算の目的には(4.3.17)''式に依る方が"便利"である。(4.3.17)乃至(4.3.17)''式に於て、右辺第1項の  $m$  なる項は  $t=t_0$  に加へられた単位跳躍函数入力に依つて誘起せられた現象の傾斜を表はし、残余の項は信号が周期的なる場合に導入せられたものである。従つて  $A$  が  $At_0$  に対して充分小なるか或は  $A$  が充分大なる場合、換言すれば、信号の周期性が出力波形に与へる影響を多ぼさず、事實上、単一孤立波信号に対する出力波と同一と見做し得る場合には

$$\left. \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = -m G^m A \quad (4.3.18)$$

となり段数  $m$  に比例する。従つて同一の傾斜を與へる為には段数  $m$  に比例して  $A$  の値を小さくする必要がある\*。亦4.3.4圖に於ては  $A$  及び  $At_0$  (従つて  $At_0$ ) の値は上述の條件を完全に満足するとは云ひ難いが、其の箇の消息を充分に物語つてゐる。尚4.3.1圖と4.3.3圖とを比較すれば、尚一層明確とせらる。尚  $t=t_0$  に於ける傾斜は上と全く同様にして(4.3.17)''式に対応する式として

$$\left. \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = G^m A \left[ m - e^{-At_0} \left\{ \sum_{l=0}^{m-1} m C_{l+1} \frac{(-At_0)^l}{l!} \right\} + \sum_{l=0}^{m-1} m C_{l+1} (-At_0)^l B_l(At_0) - e^{-At_0} \left\{ \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-At_0)^l}{l!} \sum_{l=0}^{m-1} m C_{l+1} (-At_0)^l B_l(At_0) \right\} \right] \quad (4.3.19)$$

を得る。然に上式の右辺第1項の  $m$  は  $t=t_0$  に加へられた夏の単位跳躍函数入力に起因するものであり第2項はその周期の初期  $t=t_0$  に加へられた冬の単位跳躍函数入力に依るものである。然に残余の項は前と同様入力が周期的なる場合に導入された項である。

#### 4.4 2回路増幅器の解析

2回路増幅器のインデシャル増幅率の  $\rho$  函数はその定義より一般に次式5.1で與へらる。

\* 沖波器回路系用理論の見地からすれば、 $\frac{\rho}{pTA}$  なる回路(1回路)は高域沖波器の一種で、その遮断周波数が  $A/2\pi$  にて與へらる。従つて  $A$  を  $m$  に逆比例して下げるとは遮断周波数を  $m$  に逆比例して下げ"ることを意味する。

$$\tilde{S}_0^{-1} A(t) = \left\{ \frac{G_1 p}{p+A_1} + \frac{G_2 p}{p+A_2} \right\} \quad (4.4-1)$$

茲に  $G_1$  及び  $A_i$  は回路定数に依つて定まる定数である。従つて各段増幅器が同一の回路定数を持つ  $m$  段  $n$  回路増幅器に対しては

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0^{-1} A(t) &= \left\{ \frac{G_1 p}{p+A_1} + \frac{G_2 p}{p+A_2} \right\}^m \\ &= \frac{p^m \{ (G_1 + G_2) p + A_1 G_2 + A_2 G_1 \}^m}{(p+A_1)^m (p+A_2)^m} \end{aligned} \quad (4.4-2)$$

となる。

[A]  $G_1 = -G_2 \equiv G$  なる場合 (抵抗結合増幅器の場合: 表3.61を参照)  
(4.4.2)式より

$$\tilde{S}_0^{-1} A(t) = G^m (A_2 - A_1)^m \frac{p^m}{(p+A_1)^m (p+A_2)^m} \quad (4.4-2)'$$

従つて

$$A(t) = \frac{G^m (A_2 - A_1)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m} E^{-A_i t} \right\} \quad (4.4-3)$$

茲に  $\sum_{i,j}^{1,2}$  は  $i=1, j=2$  及び  $i=2, j=1$  なる二つの場合に就いて和を取る事を意味する。

一方入力  $e_g(t)$  なる場合の入力を  $e(t)$  とすれば

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t e_g(t-\tau) A(\tau) d\tau \\ &= \frac{G^m (A_2 - A_1)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m} \frac{d}{dt} \int_0^t e_g(t-\tau) E^{-A_i \tau} d\tau \right\} \\ &= \frac{G^m (A_2 - A_1)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m} f(A_i) \right\} \end{aligned} \quad (4.4-4)$$

但し上式中の  $f(A_i)$  は基本低周波入力を意味することは言を俟たない。

従つて若し入力  $e_g$  が周期的衝撃波なる場合に於ける入力は上式の  $f(A_i)$  に (3.5.2), (3.5.4) 式 或は表3.5.1表の結果を代入すれば良い筈である。

一方今の場合の周期的インデシャル増幅率は (4.4.3) を (1.1.11) 及び (1.1.14) に代入して

$$S_n(\tau) = \frac{G^m (A_2 - A_1)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left[ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m} \varphi_n(A_i \tau) \right] \quad (4.4.5)a$$

$$S(\tau) = \frac{G^m (A_2 - A_1)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left[ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m} \varphi(A_i \tau) \right] \quad (4.4.5)b$$

但し  $\varphi_n(A_i\tau)$  並に  $\varphi(A_i\tau)$  は (4.3.2) 式にて與へられる。

以下前節に於けると同様，問題を周期的定常インデント増幅率  $S(\tau)$  に限定し，之を數値計算に適した形に書改めよう。今の場合にも 4.3 に於けると同様  $S(\tau)$  は  $t_0$  を周期とする周期函数にて (4.3.10) の關係ある事は (4.4.5) の式より明らかである。従つて  $-t_0 \leq \tau < 0$  に対する  $S(\tau)$  の値は  $t_0 \geq \tau > 0$  に於ける  $S(\tau)$  の夫から直ちに知る事が出来るから以下  $t_0 \geq \tau > 0$  の範圍に於ける  $S(\tau)$  について吟味，する事とする。茲に

$$\begin{aligned} & \frac{(A_j - A_i)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m} E^{-A_i\tau} \right\} \\ &= E^{-A_i\tau} \sum_{h=0}^{m-1} \frac{(-A_i\tau)^h}{h!} \sum_{h=0}^{m-h-1} (-1)^h {}_{m+h-1}C_{h \cdot m-1} C_{h+1} \gamma_{ij}^h \quad (4.4.6) \end{aligned}$$

$$\text{但し} \quad \gamma_{ij} = \frac{A_i}{A_i - A_j} = 1 - \gamma_{ji} \quad (i, j = 1, 2) \quad (4.4.7)$$

一方

$$\begin{aligned} & \frac{(A_j - A_i)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m} \frac{E^{-A_i t_0}}{(1 - E^{-A_i t_0})} E^{-A_i\tau} \right\} \\ &= E^{-A_i\tau} \sum_{h=0}^{m-1} \frac{(-A_i\tau)^h}{h!} \sum_{h=0}^{m-h-1} (-1)^h {}_{m+h-1}C_{h \cdot m-1} \gamma_{ij}^h \\ & \quad \times \sum_{l=0}^{m-h-1} {}_{m+l-1}C_{h \cdot m-1} C_{h+l+1} (-A_i t_0)^l B_l(A_i t_0) \quad (4.4.8) \end{aligned}$$

従つて

$$\begin{aligned} S(\tau) &= G^m S'(\tau) = G^m \left\{ S_1'(\tau) + (-1)^m S_2'(\tau) \right\} \\ S_i'(\tau) &= E^{-A_i\tau} \sum_{h=0}^{m-1} \frac{(-A_i\tau)^h}{h!} Q_i \quad (4.4.9) \end{aligned}$$

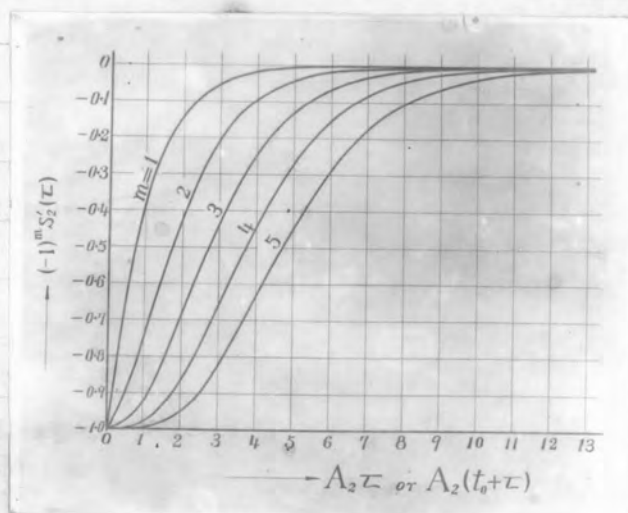
$$Q_1 = \sum_{h=0}^{m-1} (-1)^h {}_{m+h-1}C_{h \cdot m-1} C_{h+1} \gamma_{12}^h \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-h-1} \frac{m-1}{m-1} \frac{C_{h+l+1}}{C_{h+1}} (-A_1 t_0)^l B_l(A_1 t_0) \right\} \quad (4.4.10)_1$$

$$Q_2 = \sum_{h=0}^{m-1} (-1)^h {}_{m+h-1}C_{h \cdot m-1} C_{h+1} \gamma_{21}^h \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-h-1} \frac{m-1}{m-1} \frac{C_{h+l+1}}{C_{h+1}} (-A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \right\} \quad (4.4.10)_2$$

上式中  $Q_i$  は  $\tau$  に無關係な常數にて  $A_i t_0$ ,  $A_i/A_j$  及び  $m$  が與へられれば確定する。即ち (4.4.9) 式が所要の公式である。

次に上式の特例の場合として例へば抵抗結合増幅器の場合に於けるが





第 4.4.1 圖

如く  $A_1 \ll A_2$  なる条件が成立する場合が实际问题として重要であるので以下此の場合に就いて考察しよう。(4.4.7)式より今の場合  $l=1$  は

$$Y_{12} \cong 0, \quad \alpha_2 \cong 1 \quad (4.4.11)$$

なるを以て, (4.4.10)<sub>1</sub> は近似的に

$$Q_1 \cong m-1 C_A \left\{ 1 + \sum_{\ell=0}^{m-d-1} \frac{m-1 C_{\ell+A}}{m-1 C_A} (-A_1 t_0)^\ell B_\ell(A_1 t_0) \right\} \quad (4.4.10)_1'$$

となる。従つて  $S'_1(\omega)$  なる値は (4.3.7) 式の  $S(\omega)$  と同じで、一回路増幅器の周期的定常インデシャル増幅率に等しく亦 4.3.2 図及び 4.3.1 表にて與へられる。一方

$$Q_2 \cong \sum_{h=0}^{m-d-1} (-1)^h m+h-1 C_h \cdot m-1 C_{h+A} \left\{ 1 + \sum_{\ell=0}^{m-d-h-1} \frac{m-1 C_{h+\ell+A}}{m-1 C_{h+A}} (-A_2 t_0)^\ell B_\ell(A_2 t_0) \right\} \quad (4.4.10)_2'$$

$$\text{或は} = \sum_{h=0}^{m-d-1} (-1)^h m+h-1 C_h \cdot m-1 C_{h+A} + \sum_{\ell=0}^{m-d-1} (-A_2 t_0)^\ell B_\ell(A_2 t_0) \sum_{h=0}^{m-d-\ell-1} (-1)^h m+h-1 C_h \cdot m-1 C_{h+A} \quad (4.4.10)_2''$$

$$\text{然るに} \sum_{g=0}^n (-1)^g n+g C_g \cdot n C_{n-g} = \sum_{g=0}^n \binom{-n-1}{g} \binom{n}{n-g} = \binom{-1}{n} = (-1)^n$$

なるを以て

$$Q_2 = (-1)^{m-d-1} \left\{ 1 + \sum_{\ell=0}^{m-d-1} (A_2 t_0)^\ell B_\ell(A_2 t_0) \right\} \quad (4.4.10)_2'''$$

従つて

$$(-1)^m S'_2(\omega) = -\varepsilon^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(A_2 \tau)^\delta}{\delta!} \left\{ 1 + \sum_{\ell=0}^{m-d-1} (A_2 t_0)^\ell B_\ell(A_2 t_0) \right\} \quad (4.4.12)$$

然るにオシロスコプ[B]に読ませる如く  $A_2 t_0$  が充分大でなければ到底おのれ増幅は望めず、通常の使用状態では  $(A_2 t_0)^\ell B_\ell(A_2 t_0) \cong 0$  なる故

$$(-1)^m S'_2(\omega) \cong -\varepsilon^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(A_2 \tau)^\delta}{\delta!} \quad (4.4.12)'$$

と見做して差支へない。亦 4.4.1 図は上式の値を示す。従つて (4.4.9)<sub>1</sub>, (4.4.10)<sub>1</sub>' 及び (4.4.12)<sub>1</sub>' より明かな如く、今の場合の  $S(\omega)$  は亦 4.3.2 図及び 4.4.1 図の代數表にて與へられる。尚單位函数入力に対する今の回路の出力  $A(\omega)$  は

$$A(\omega) = S(\omega) t_0 = \infty$$

にて與へられる。然るに  $\omega=0$  の近傍にあつては  $A_1 \ll A_2$  なるを以て  $S'_1(\omega) = 1$  と見做すことが出来る。従つて  $A(\omega)$  の  $\omega=0$  の極く近傍に於ける様相は

$$A(\omega) = G^m \left\{ 1 + (-1)^m S'_2(\omega) t_0 = \infty \right\} \quad (4.4.13)$$

にて與へられる。然るに亦 4.4.1 図は  $(-1)^m S'_2(\omega) t_0 = \infty$  の波形を示す

はすものなる故\* 同図の縦軸の目盛を1丈増せば、今の場合の出力の立ち上りの模様を映へる。この立ち上の傾斜を急ならしめ特性を改善する方法に就ては4.6に詳述するであらう。

[B]  $G_1 = G_2$  なる場合 (チョーク結合増幅器の場合 表3.6.1表)

(4.4.2) 式に於て 簡単の爲に

$$G_1 + G_2 = G, (A_1 G_2 + A_2 G_1) / (G_1 + G_2) = A \quad (4.4.14)$$

と置けば

$$\tilde{A}(t) = G^m \left\{ \frac{p(p+A)}{(p+A_1)(p+A_2)} \right\}^m \quad (4.4.15)$$

従つて

$$A(t) = \frac{G^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1} (A-A_i)^m}{(A_j-A_i)^m} E^{-A_i t} \right\} \quad (4.4.16)$$

となる。但し上式の  $A$  は (4.4.14) に従へば  $A_i$  の函数なるも (4.4.16) 式右辺に於ける  $A_i$  に就ての微分演算に在ては  $A$  は  $A_i$  に無関係なる値と見做して微分すべきである。†

従つて 任意の入力に対する出力は、 $f(A)$  を既述の如く基本低周波入力とすれば

$$e(t) = \frac{G^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1} (A-A_i)^m}{(A_j-A_i)^m} f(A_i) \right\} \quad (4.4.17)$$

となる。

一方今の場合の周期的インデシヤル増幅率は (4.4.16), (1.1.11) より (1.1.14) より

$$S_n(\omega) = \frac{G^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1} (A-A_i)^m}{(A_j-A_i)^m} \varphi_n(A_i \tau) \right\} \quad (4.4.18)_a$$

$$S(\omega) = \frac{G^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1} (A-A_i)^m}{(A_j-A_i)^m} \varphi(A_i \tau) \right\} \quad (4.4.18)_b$$

となる。

\* (4.4.13) 式の誘導に際しては  $(A_2 t_0)^0 B_0(A_2 t_0) = 0$  と仮定してゐるが  $t_0 = \infty$  の時には此の仮定は完全に成立する。

† (4.4.16) 式は元来次の如き意味を有する。

$$A(t) = \frac{G^m}{(m-1)!} \sum_{i,j}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left\{ \frac{p^{m-1} (p+A)^m}{(p+A_j)^m} E^{pt} \right\}_{p=-A_i}$$

従つて (4.4.16) に於ては  $A$  は  $A_i$  に無関係と考へて微分すべきである。

従って

$$\frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1} (A-A_i)^m}{(A_j-A_i)^m} E^{-A_i \tau} \right\} = G_i^m E^{-A_i \tau} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^s}{s!} \sum_{k=0}^{m-s-1} (-1)^{m+k-1} C_k \rho_{ij}^k \\ \times \sum_{l=0}^{m-s-k-1} m C_k \cdot m-1 C_{k+l+s} (\rho_{ij} \delta_{ij})^k \quad (4.4.19)$$

さらに

$$\delta_{ij} = (G_i + G_j) / G_i \quad (4.4.20)$$

一方

$$\frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left[ \frac{A_i^{m-1} (A-A_i)^m}{(A_j-A_i)^m} \frac{E^{-A_i t_0}}{1-E^{-A_i t_0}} E^{-A_i \tau} \right] \\ = G_i^m E^{-A_i \tau} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^s}{s!} \sum_{k=0}^{m-s-1} (-1)^{m+k-1} C_k \rho_{ij}^k \sum_{l=0}^{m-s-k-1} m C_k (\rho_{ij} \delta_{ij})^k \\ \times \sum_{l=0}^{m-s-k-l-1} m-1 C_{k+l+s+l} (-A_i t_0)^l B_l(A_i t_0) \quad (4.4.21)$$

なるを以て、今の場合は  $t_0 \geq \tau \geq 0$  に対して\*

$$\left. \begin{aligned} S(\tau) &= G_1^m S_1'(\tau) + G_2^m S_2'(\tau) \\ S_i'(\tau) &= E^{-A_i \tau} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^s}{s!} Q_i \end{aligned} \right\} \quad (4.4.22)$$

$$Q_1 = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k {}_{m+k-1} C_k \rho_{12}^k \sum_{l=0}^{m-s-k-1} m C_k \cdot m-1 C_{k+l+s} (\rho_{12} \delta_{12})^k \\ \times \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-s-k-l-1} \frac{m-1 C_{k+l+s+l}}{m-1 C_{k+l+s}} (-A_1 t_0)^l B_l(A_1 t_0) \right\} \quad (4.4.23)_1$$

$$Q_2 = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k {}_{m+k-1} C_k \rho_{21}^k \sum_{l=0}^{m-s-k-1} m C_k \cdot m-1 C_{k+l+s} (\rho_{21} \delta_{21})^k \\ \times \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-s-k-l-1} \frac{m-1 C_{k+l+s+l}}{m-1 C_{k+l+s}} (-A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \right\} \quad (4.4.23)_2$$

次に上式の特別の場合として普通キョーク結合増幅器を二回路増幅器と見做した場合に於ける場合に、

$$A_2 \gg A_1, \quad G_2 \gg G_1$$

なる関係が成立する場合に就いて吟味するに、今の場合には

$$\left. \begin{aligned} G &\cong -G_2, \quad \rho_{12} \cong 0, \quad \rho_{21} \cong 1 \\ \delta_{12} &\gg 1, \quad \delta_{21} \cong 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.24)$$

\* 今の場合にも  $S(\tau)$  は  $t_0$  を周期とする周期函数であるから  $t_0 \geq \tau \geq 0$  なる領域のみ考究すれば充分である。

と仮定から

$$Q_1 \equiv \sum_{k=0}^{m-1} m C_k \cdot m-1 C_{k+1} (\delta_{12} \delta_{12})^k \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-1-k-1} \frac{m-1 C_{k+l+1}}{m-1 C_{k+l}} (-A_1 t_0)^l B_l(A_1 t_0) \right\} \quad (4.4.25)$$

$$Q_2 \equiv \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k m_{m+k-1} C_k \sum_{k=0}^{m-1-k-1} m C_k \cdot m-1 C_{k+l+1} \\ \times \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-1-k-1} \frac{m-1 C_{k+l+1}}{m-1 C_{k+l}} (-A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k m_{m+k-1} C_k \sum_{k=0}^{m-1-k-1} m C_k \cdot m-1 C_{k+l+1} \\ + \sum_{l=0}^{m-1} (-A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \sum_{k=0}^{m-1-l-1} (-1)^k m_{m+k-1} C_k \sum_{k=0}^{m-1-k-1} m C_k \cdot m-1 C_{k+l+1} \quad (4.4.25)_2$$

然るに

$$\sum_{k=0}^{m-1-k-1} m C_k \cdot m-1 C_{k+l+1} = 2m-1 C_{m-2-k-1} \\ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k m_{m+k-1} C_k \cdot 2m-1 C_{m-2-k-1} = m C_2$$

従つて

$$Q_2 = m C_2 \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{m C_{l+1}}{m C_l} (-A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \right\} \quad (4.4.25)'$$

$$G_2^m S_2'(\tau) = G_2^m E^{-A_2 \tau} \sum_{k=0}^{m-1} m C_k \frac{(-A_2 \tau)^k}{k!} \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-1-k-1} \frac{m C_{k+l+1}}{m C_{k+l}} (-A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \right\} \quad (4.4.26)$$

上式の値は (4.3.7) 式の 1 回路増幅器の周期的インデリアル増幅率  $S(\tau)$  と全く同じであることに注意を要する。

一方又

$$|\delta_{12} \delta_{12}| \equiv \frac{A_1 G_2}{A_2 G_1} \gg 1 \quad *$$

なる時は (4.4.25)<sub>1</sub> 式に於て  $k=0$ ,  $k=m-1$  なる項の他は省略する事が出来るから

$$G_1^m S_1'(\tau) = m G_1^m (\delta_{12} \delta_{12})^{m-1} E^{-A_1 \tau} \left\{ 1 + B_0(A_1 t_0) \right\} \quad (4.4.27)$$

$$= G_2^m \left\{ m \frac{G_1}{G_2} \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^{m-1} \right\} E^{-A_1 \tau} \left\{ 1 + B_0(A_1 t_0) \right\} \quad (4.4.27)'$$

上式は (4.3.7) 式に於て  $m=1$  と置いたものと全く同形で "表 4.3.2 図及表 4.3.1 表の  $m=1$  なる場合に該当する。然し右の  $\left\{ m \frac{G_1}{G_2} \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^{m-1} \right\}$  の値が極めて小なる

\* 此の條件は高周波トヨク結合に於ては勿論の事、低周波トヨク結合に在つても通常成立する條件である。(表 3.6.1 表参照)



故  $G_2^m S_2'(z)$  に対して  $G_1^m S_1'(z)$  は極めて小さい。今の場合には

$$S'(z) \cong G_2^m S_2'(z)$$

と見做すことが出来る。従つてオ4・3・2図及びオ4・3・1表が今の場合の周期的定常インデシャル増幅率を與へる式である。然しオI篇3・2に説述せる如く、 $A_2$ が過大なる場合には  $S_2'(z)$  は真空管電極間並に配線面の静電容量、コイルの分布容量その他の微妙容量に依つて崩れ易く(オ4・4・26)式に依つて與へられる波形とは著しく異つたものとなる懼れがある。之に就いては節を改めて論ずる。

#### 4.5 3回路増幅器の解析

各段同一の回路定數を有する  $m$  段3回路増幅器のインデシャル増幅率の  $p$ -函数はその定義に依り、一般に次式(4.5.1)で與へられる。

$$S_0^{-1} A(t) = \left\{ \frac{G_1 p}{p+A_1} + \frac{G_2 p}{p+A_2} + \frac{G_3 p}{p+A_3} \right\}^m \quad (4.5.1)$$

$$= \frac{p^m \{Gp^2 + Ap + B\}^m}{(p+A_1)^m (p+A_2)^m (p+A_3)^m} \quad (4.5.1)'$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} G &= G_1 + G_2 + G_3 \\ A &= G_1(A_2 + A_3) + G_2(A_3 + A_1) + G_3(A_1 + A_2) \\ B &= G_1 A_2 A_3 + G_2 A_3 A_1 + G_3 A_1 A_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.2)$$

(A)  $G=A=0$  ;  $B \neq 0$  なる場合 (変圧器結合増幅器の場合オ3・6・1表参照)

今の場合には

$$S_0^{-1} A(t) = \left\{ \frac{B p}{(p+A_1)^m (p+A_2)^m (p+A_3)^m} \right\}^m \quad (4.5.3)$$

然して  $A=G=0$  なる条件を利用すれば“(4.5.2)式より

$$B = G_i (A_i - A_j)(A_i - A_k) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (4.5.4)$$

と求むことが出来る。

故て今の場合のインデシャル増幅率  $A(t)$  は(4.5.3)式より

$$A(t) = \frac{B^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} E^{-A_i t} \quad (4.5.5)$$

但し  $\sum_{i,j,k}^{1,2,3}$  は  $i=1, j=2, k=3$ ;  $i=2, j=3, k=1$ ;  $i=3, j=1, k=2$  なる3つの場合に就いて和を取る事を意味する。

従つて若し入力が  $e_g(t)$  なる場合の出力は  $f(A)$  を基本低周波出力とせば

$$e(t) = \frac{B^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} f(A_i) \right\} \quad (4.5.6)$$

にて與へられる。

一周期的インテンザル増幅率は (1.1.10) 及び (1.1.14) に (4.5.5) を代入して

$$S_n(\tau) = \frac{B^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \varphi_n(A_i \tau) \right\} \quad (4.5.7)_a$$

$$S(\tau) = \frac{B^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \varphi(A_i \tau) \right\} \quad (4.5.7)_b$$

但し  $\varphi_n(A_i \tau)$  及び  $\varphi(A_i \tau)$  は (4.3.2) 式にて與へられるものと同一である。

以下前と同様  $S(\tau)$  に就いて吟味する。今の場合にも  $S(\tau)$  は  $t_0$  を周期とする周期函数であつて (4.3.10) なる新係を有する。従つて  $0 < \tau \leq t_0$  に対する  $S(\tau)$  に就いて吟味すれば充分である。

先づ  $S(\tau)$  を数値計算に適した形とすることを考へるに、

$$\begin{aligned} & \frac{B^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} e^{-A_i \tau} \right\} \\ &= G_i^m e^{-A_i \tau} \sum_{\Delta=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^\Delta}{\Delta!} \sum_{R=0}^{m-\Delta-1} \frac{m+\Delta-1}{m+\Delta-1} C_R (-r_{ij})^R \sum_{g=0}^{m-\Delta-R-1} \frac{m-\Delta-R-1}{m-1} C_{\Delta+R+g} m+g-1 C_g (-r_{ik}) \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

$$\text{或は} \quad = G_i^m e^{-A_i \tau} \sum_{\Delta=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^\Delta}{\Delta!} \sum_{R=0}^{m-\Delta-1} \frac{m+\Delta-1}{m+\Delta-1} C_R (-r_{ik})^R \sum_{g=0}^{m-\Delta-R-1} \frac{m-\Delta-R-1}{m-1} C_{\Delta+R+g} m+g-1 C_g (-r_{ij})^g \quad (4.5.8)'$$

一方

$$\begin{aligned} & \frac{B^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1}}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \frac{e^{-A_i t_0}}{1 - e^{-A_i t_0}} e^{-A_i \tau} \right\} \\ &= G_i^m e^{-A_i \tau} \sum_{\Delta=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^\Delta}{\Delta!} \sum_{R=0}^{m-\Delta-1} \frac{m+\Delta-1}{m+\Delta-1} C_R (-r_{ij})^R \\ & \quad \times \sum_{g=0}^{m-\Delta-R-1} \frac{m-\Delta-R-1}{m+g-1} C_g (-r_{ik})^g \sum_{\ell=0}^{m-\Delta-R-g-1} \frac{m-\Delta-R-g-1}{m-1} C_{\Delta+R+g+\ell} (-A_i t_0)^\ell B_\ell(A_i t_0) \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

或は上式右辺の  $r_{ij}$  及び  $r_{ik}$  を互に交換代入した形でも良い。然して  $r_{ij}$  及び  $r_{ik}$  は (4.4.7) 式にて與へられるものである。従つて今

$$S(\tau) = G_1^m S_1'(\tau) + G_2^m S_2'(\tau) + G_3^m S_3'(\tau) \quad (4.5.10)$$

と置けば  $0 < \tau \leq t_0$  に対しては

$$S'_i(\tau) = e^{-A_i \tau} \sum_{a=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^a}{a!} Q_i$$

$$Q_i = \sum_{A=0}^{m-A-1} \sum_{m+A-1}^{m+A-1} C_A (-\gamma_{ij})^A \sum_{g=0}^{m-A-1} \sum_{m-1}^{m-1} C_{A+R+g} \cdot m+g-1 C_g (-\gamma_{ik})^g$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-A-R-g-1} \frac{m-1}{m-1} \frac{C_{A+R+g+l}}{C_{A+R+g}} (-A_i t_0)^l B_l(A_i t_0) \right\} \quad (4.5.11)$$

上式が所要の周期的定常インデシャル増幅率である。

次に上式の特別の場合として変圧器結合増幅器を第3.6.1表に示す如く3回路増幅器と見做した場合に就いて考へる。此の場合には  $A_1, A_2, A_3$  の内には通常何れか一つ例へば  $A_1$  の絶対値は残りの  $A_2, A_3$  の夫れに比して遙かに小で且つ  $A_2, A_3$  は共軌複素数となるのが普通である。即ち通常

$$|A_1| \ll |A_2| = |A_3|$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{13} &\cong 0 \\ \gamma_{31} = \gamma_{21} &\cong 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.12)$$

なるを以て(4.5.11)式より

$$Q_1 = m-1 C_A \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-A-1} \frac{m-1}{m-1} \frac{C_{A+l}}{C_A} (-A_1 t_0)^l B_l(A_1 t_0) \right\}$$

$$Q_2 = (-1)^{m-A-1} \sum_{A=0}^{m-A-1} \sum_{m+A-1}^{m+A-1} C_A (\gamma_{23})^A \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-A-1} (A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \right\}$$

$$Q_3 = (-1)^{m-A-1} \sum_{A=0}^{m-A-1} \sum_{m+A-1}^{m+A-1} C_A (\gamma_{32})^A \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-A-1} (A_3 t_0)^l B_l(A_3 t_0) \right\} \quad (4.5.13)$$

上記の  $Q_i$  を(4.5.11)式に代入して得られる  $S'_i(\tau)$  は(4.3.7)式の  $S'(\tau)$  と全く同形であり第4.3.2図及び第4.3.1表にて與へられることは屢述せる處である。

一方今の場合の  $G_L$  は第3.6.1表より明かな如く

$$G_L = - \frac{\mu R_0 R_L}{(R_0 + R_L) L_e C_e} \frac{1}{(A_i - A_j)(A_i - A_k)} \quad (4.5.14)$$

にて與へられるを以て(4.5.12)の條件を考慮すれば

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{(A_2 - A_1)(A_2 - A_3)} \cong -\gamma_{32}, \quad \frac{G_3}{G_1} \cong -\gamma_{23} \quad (4.5.15)$$

従つて(4.5.10), (4.5.11)及び(4.5.15)より

$$S(\tau) = G_1 \left\{ S'_1(\tau) + (-\gamma_{32})^m S'_2(\tau) + (-\gamma_{23})^m S'_3(\tau) \right\} \quad (4.5.16)$$

を得る。然るに上述せるが如く  $A_2, A_3$  が共軌複素数なる故

$$S(\tau) = G_1^m \{ S_1'(\tau) + 2 \times \text{Real Part of } (-\beta_2)^m S_2'(\tau) \} \quad (4.5.10)''$$

にて與へられる。

(B)  $G=0$   $A \neq 0$   $B \neq 0$  なる場合 (4.3.7 結合増幅器及び補償抵抗結合増幅器の場合 4.3.6.1 表参照)

今の場合には (4.5.1) 式より

$$\mathcal{L}^{-1} A(t) = \frac{\rho^m \{ A\rho + B \}^m}{(\rho + A_1)^m (\rho + A_2)^m (\rho + A_3)^m} \quad (4.5.16)$$

従つて

$$A(t) = \frac{A^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{A_i^{m-1} \left\{ \frac{B}{A} - A_i \right\}^m}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \varepsilon^{-A_i t} \right\} \quad (4.5.17)$$

一方入力  $e_g(t)$  なる場合の出力は基本周期波出力を  $f(A)$  とせば

$$e(t) = \frac{A^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left[ \frac{A_i^{m-1} \left\{ \frac{B}{A} - A_i \right\}^m}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} f(A_i) \right] \quad (4.5.18)$$

なる式にて算定せられる。

次に今の場合の周期的インテリヤル増幅率を求めるに (4.5.11) 及び (4.5.14)

に (4.5.17) を代入して

$$\left. \begin{aligned} S_n(\tau) &= \frac{A^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left[ \frac{A_i^{m-1} \left\{ \frac{B}{A} - A_i \right\}^m}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \varphi_n(A_i \tau) \right] \\ S(\tau) &= \frac{A^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left[ \frac{A_i^{m-1} \left\{ \frac{B}{A} - A_i \right\}^m}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \varphi(A_i \tau) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.5.19)$$

然して  $\varphi_n(A_i \tau)$  及び  $\varphi(A_i \tau)$  は (4.3.2) 式にて與へられることは前と同様である。

以下本節 (A) に於けると同様  $S(\tau)$  に就いて考察する。此の場合も  $S(\tau)$  は  $t_0$  を周期とする周期函数なる故に以下に於ては  $0 \leq \tau < t_0$  なる区間に対する  $S(\tau)$  に就いて論ずれば充分である。

故て (4.5.2) 及び  $G=0$  なる条件より

$$B - AA_i = G_i (A_i - A_j)(A_i - A_k)$$

なる関係を得ることを利用すれば

$$\begin{aligned} & \frac{A^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left[ \frac{A_i^{m-1} \left\{ \frac{B}{A} - A_i \right\}^m}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \varepsilon^{-A_i \tau} \right] \\ &= G_i^m \varepsilon^{-A_i \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{h=0}^{m-1-\delta} m+h-1 C_h (-\delta_{ij})^h \\ & \quad \times \sum_{g=0}^{m-1-\delta-h} m+g-1 C_g (-\delta_{ik})^g \sum_{z=0}^{m-1-\delta-h-g} m-1 C_{\delta+h+g+z} m C_z (-\delta_i)^z \quad (4.5.20) \end{aligned}$$

一方又

$$\begin{aligned} & \frac{A^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{A_i^{m-1} \left\{ \frac{B}{A} - A_i \right\}^m}{(A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \frac{e^{-A_i t_0}}{1 - e^{-A_i t_0}} e^{-A_i \tau} \\ &= G_i^m e^{-A_i \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{h=0}^{m-\delta-1} m+h-1 C_h (-\delta_{ij})^h \sum_{g=0}^{m-\delta-h-1} m+g-1 C_g (-\delta_{ik})^g \\ & \quad \times \sum_{\ell=0}^{m-\delta-h-g-1} m C_\ell (-\delta_i)^2 \sum_{\ell=0}^{m-\delta-h-g-2-1} m-1 C_{\delta+h+g+\ell+2} (-A_i t_0)^\ell B_\ell(A_i t_0) \quad (4.5.21) \end{aligned}$$

但し  $\delta_{ij}$  は (4.4.7) 式にて表へられ、 $\delta_i$  は

$$\delta_i = \frac{A_i A}{B - A_i A} = \frac{A_i A}{G_i (A_i - A_k)(A_i - A_j)} = \frac{1}{G_i} \{ G_j \delta_{ik} + G_k \delta_{ij} \} \quad (4.5.22)$$

なる値を意味する。従つて

$$S(\tau) = G_1^m S'_1(\tau) + G_2^m S'_2(\tau) + G_3^m S'_3(\tau) \quad (4.5.23)$$

× 置けば、 $S(\tau)$  は今の場合にも  $t_0$  を周期とする周期函数なることを考慮すれば、 $0 < \tau \leq t_0$ 

に対して

$$S'_i(\tau) = e^{-A_i \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(-A_i \tau)^\delta}{\delta!} Q_i \quad (4.5.24)$$

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{h=0}^{m-\delta-1} m+h-1 C_h (-\delta_{ij})^h \sum_{g=0}^{m-\delta-h-1} m+g-1 C_g (-\delta_{ik})^g \\ & \quad \times \sum_{\ell=0}^{m-\delta-h-g-1} m-1 C_{\delta+h+g+\ell+2} \cdot m C_\ell (-\delta_i)^2 \left\{ 1 + \sum_{\ell=0}^{m-\delta-h-g-2-1} \frac{m-1 C_{\delta+h+g+\ell+2}}{m-1 C_{\delta+h+g+\ell+2}} (-A_i t_0)^\ell B_\ell(A_i t_0) \right\} \quad (4.5.25) \end{aligned}$$

以上 (4.5.23) 乃至 (4.5.25) が所要の周期的定常インデントル増幅率の一般算定式である。

次ぎに之を利用し、4-ヨーク結合増幅器と3回路増幅器と見做した場合の計算式を誘導することしよう。

扱て今の場合は表3.6.1表より明かな如く

$$G_i = - \frac{\mu}{C_2 R_a} \frac{(A_i - \frac{B}{A})}{(A_i - A_j)(A_i - A_k)} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (4.5.26)$$

なるを以て (4.5.22) 式の  $\delta_i$  は

$$\delta_i = - \frac{A_i}{A_i - \frac{B}{A}} \quad (4.5.27)$$

となる。

i) 低周波4-ヨーク結合の場合

今の場合は  $A_2, A_3$  は共軛複素数、 $A_1$  は実数にて



$$A_1 \ll |A_2| = |A_3| ; \quad |A_2| = |A_3| \gg R/L \quad (4.5.28)$$

なる関係を有するのが普通である。従つて(4.5.26)式より

$$\left| \frac{G_1}{G_2} \right| = \left| \frac{G_1}{G_3} \right| \ll 1 \quad (4.5.29)$$

なるを以て

$$S(\tau) \cong G_2^m S_2'(\tau) + G_3^m S_3'(\tau) = 2 \times \text{Real Part of } G_2^m S_2'(\tau) \quad (4.5.30)$$

と見做す事が出来る。一方(4.5.28)の条件より

$$\left. \begin{aligned} \delta_2 &\cong \delta_3 \cong -1 \\ \gamma_{12} &\cong \gamma_{13} \cong 0 \\ \beta_{21} &\cong \beta_{31} \cong 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.31)$$

となるから、(4.5.24)及び(4.5.25)式より

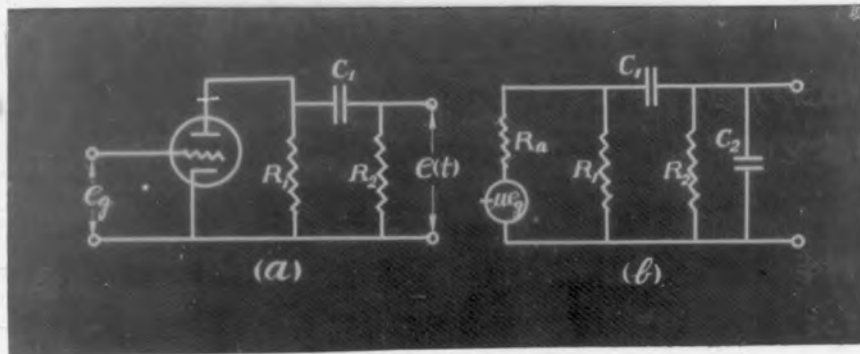
$$\begin{aligned} S_2'(\tau) &= e^{-A_2 \tau} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-A_2 \tau)^n}{n!} Q_2 \\ Q_2 &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{m+n-1}{m+n-1} C_n (-\beta_{23})^n m C_{m+n} \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m+n-1} \frac{m C_{m+l} + l}{m C_{m+l}} (-A_2 t_0)^l Q_l(A_2 t_0) \right\} \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

を得る。上式が所要の周期的定常インテリヤル増幅率である。

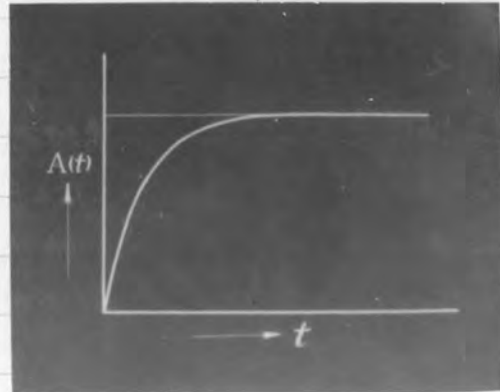
#### ii) 高周波4ヨーク結合の場合

今の場合の計算式は次節に述べるインダクタンスに依つて高周波特性を改善せられた抵抗結合増幅器と形式上には全く同様に取扱い得るのであつて、上述の低周波4ヨーク結合と異なるのは、(4.5.28)のホニル条件が成り立たない点で、此の条件に代る可き条件としては  $R/L \gg A_1$  となる。これが詳細は次節を参照せられたい。

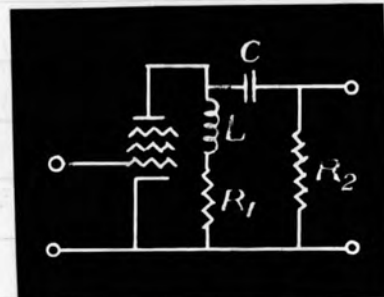
以上3回路増幅器の遷渡現象の解析特に周期的定常インテリヤル増幅率に就いて述べた変圧器結合及び低周波4ヨーク結合を3回路増幅器と見做した時の理論式を計算したか、以上の所論より明かな如く(9)中には大なる振動性出力を有し、(4.5.10)及び(4.5.30)の  $S'(\tau)$  の意、 $\tau$  変化の速い現象は無き増幅出来ない。のみならず真空管特性の非直線性は兎角として、変圧器にしても、低周波4ヨークにしても、其事が有る鉄心の非直線性は波形の無き増幅の上から云つて望ましいものではなく、三角波、矩形波、梯形波等の特殊波形波の如く広い周波数に亘つて一様に増幅する目的には余り推奨出来たものではないし、又實際問題としても斯る目的に適用されないもので、茲では一応の算定公式の誘導に留め詳細な吟味或は数値例等は一切省略することとする。



第 4.6.1 圖



第 4.6.2 圖



第 4.6.3 圖

#### 4.6 広帯域抵抗結合増幅器の解析

広帯域増幅器として最も広く用いられる抵抗結合増幅器が4.6.1図(a)の等価回路は既述せる如く、一般に同図(b)の如くに見做す事が出来る。即ち真空管電極間の静電容量及び配線その他の静電容量 $C_2$ を考慮する時は、該回路は二回路増幅器となり、単位跳躍函数入力に対する出力、即ち所謂インデシャル増幅率 $A(t)$ は第3.6.1表より

$$A(t) = G \left\{ \frac{p}{p+A_1} - \frac{p}{p+A_2} \right\} = G \{ e^{-A_1 t} - e^{-A_2 t} \} \quad (4.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} G &= -\frac{\mu R_1 R_2}{R_0^2} & A_1 &= \frac{R_1 + R_0}{C_1 R_0^2} & A_2 &= \frac{R_0^2}{R_1 R_2 R_0 C_2} \\ R_0^2 &= R_1 R_2 + R_2 R_0 + R_0 R_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.6.2)$$

然るに一般に $C_1 \gg C_2$ なるを以て、 $A_2 \gg A_1$ なる関係がある。従つて長時間域(低周波部)の過渡特性、換言すれば、時間 $t$ の相当大なる値に対する過渡特性は $A_1$ の値に依つて決定され、 $A_1$ が大きい程良好な特性を與へることは示さるゝ。一方短時間域(高周波部)の過渡特性、即ち $t=0$ の極く近傍の過渡特性は

$$A(t) = G(1 - e^{-A_2 t}) \quad (4.6.1)'$$

にて與へられ4.6.2圖に示す如く、その立上り斜率を帯びる。之れが多段増幅器とすると段數の増加に伴つて此の斜率は一層顯著となる事は4.4.1圖に示す通りである。(但し同圖の縦軸は $A(t)/G_m$ の値で、その目盛の値を1丈増加に考へねばならぬ。)従つて $A_2$ を可及的大ならしめる事は変化の速な現象の無差増幅には極めて重要な事である。然して $A_2$ を大ならしめる一つの手段として衆知の如く負荷抵抗 $R_1$ に直列に僅かなインダクタンス $L$ を挿入する方法がある。<sup>(14)</sup> (4.6.3圖参照)従つて本回路は實質的には抵抗結合なるも形式的には4.4.1圖の如く結合で前節の結果を適用し得る。斯る回路の短時間域の過渡特性は既にBedford & Friendall 両氏に依つて研究されてゐる。<sup>(12)</sup> 即ち両氏は斯る増幅器を十數段乃至數十段用いた時の過渡特性をFourier級數法を巧みに利用して開明し、之れより該増幅器の設計の指針を與へてゐる。然し實際問題として十數段以上も増幅することはほとんどなく多くは數段程度である。然し段數の少ない場合同氏が用いた角解法を其儘適用する時は段數の極端に多い場合に比して可成り煩雜な數値計算を必要とするし且つその精度にも場合に依つては多少の疑念なきを得ない。斯る見地より、筆者は茲に比較的段數の少ない場合に就いて、短時間域のみならず長時間域をも一括せる過渡特性並に筆者の提案せる周期的インデシャル量を算定し以つて上述のBedford & Friendall 氏が與へた設計法を段數が數段の

場合に就いて再検討し、併せて周期波増幅特性に就いて論じようと思ふ。

初めに4.6.3図の回路は明かに3回路増幅器で、そのインデシャル増幅率  $A(t)$  は表3.6.1表より

$$A(t) = \sum_{i=1}^3 G_i \sum \frac{p}{p+A_i} = \sum_{i=1}^3 G_i E^{-A_i t} \quad (4.6.3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{R_1 + R_a}{L + G R_0^2}, \quad A_2, A_3 = \alpha \pm j\beta \\ \alpha &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_a} \right) + \frac{R_1}{L} \right\}, \quad \beta = \sqrt{\frac{L + G R_0^2}{L C_2 G R_a R_2} - \alpha^2} \\ G_i &= \frac{g_m}{C_2} \frac{(A_i - \frac{R_1}{L})}{(A_i - A_j)(A_i - A_k)} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (4.6.4)$$

初め(4.6.4)式の  $A_1$  は(4.6.2)式の  $A_1$  と全く同じものであり、且つ(4.6.4)式の  $G_1$  は後述せる如く近似的に(4.6.2)式の  $G$  に等しい。即ちインダクタス  $L$  の挿入に依り(4.6.1)式の  $G E^{-A_1 t}$  は殆んど"変化を受けず"(4.6.3)式中に保存され、之が長時間域の特性を決定するものなることは前述の通りである。一方短時間域の特性を左右する  $-G E^{-A_2 t}$  なる項は(4.6.3)式の  $G_2 E^{-A_2 t} + G_3 E^{-A_3 t}$  なる項に変化すると考えられる。従つて今  $L$  の値を適当に選定し

$$\alpha > \frac{R_0^2}{C_2 R_1 R_a} = \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_a} \right) \quad (4.6.5)$$

ならしめ得るならば、(4.6.1)式の  $-G E^{-A_2 t}$  より(4.6.3)式の  $G_2 E^{-A_2 t} + G_3 E^{-A_3 t}$  の方が速かに減衰するのみならず(4.6.4)式の  $A_2$  及び  $A_3$  が虚数部  $\beta$  を有する事(従つて  $G_2$  及び  $G_3$  も亦一般に複素数)を適当に利用する時は短時間域の過渡特性を改善し得ることを予想し得る。一方抵抗  $R_1$  の値は該増幅器をA級にて動作せしめる必要上、陽極電源の電圧の制約を受け余り大なる値にはなし得ない。(実際に使用される値は数  $k\Omega$  程度)従つて利得が減少するので(下記の(4.6.4)'式の  $G_1$  参照)  $\beta_m$  の高い真空管を使用することが望ましく、その陽極抵抗  $R_a$  は通常極めて大なる値( $M\Omega$  程度)と考えねばならないから結局

$$R_1 \ll R_2, R_a \quad (4.6.6)$$

と仮定して進めたい。(4.6.5)に(4.6.4)式の  $\alpha$  の値を代入し(4.6.6)の關係を利用すれば

$$\frac{R_1}{2L} > \frac{1}{G R_1} \quad (4.6.5)'$$



となる。よって(4.6.6)式より

$$R_1/L \gg \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_a} \right) \quad (4.6.7)$$

一方今の回路に在つては、長時間域の特性を良好ならしめる為には  $C_1$  の値を充分大きく選定する必要があり(4.6.6)及び(4.6.7)の条件を考慮する時は

$$L \ll C_1 R_0^2 \cong C_1 R_2 R_a^* \quad (4.6.8)$$

なる関係がある。以上(4.6.7)及び(4.6.8)を(4.6.4)式に代入する時は

$$A_1 \cong \frac{R_1 + R_a}{C_1 R_0^2} \cong \frac{1}{C_1 R_2}$$

$$A_2, A_3 = \alpha \pm j\beta$$

$$\alpha \cong \frac{R_1}{2L}$$

$$\beta \cong \sqrt{\frac{1}{LC_2} - \alpha^2}$$

$$G_1 = -\frac{\mu R_1 R_2}{R_0^2} \cong -g_m R_1$$

$$G_2, G_3 \cong \frac{g_m}{2} \left\{ R_1 \pm j \left( \frac{1}{\beta C_2} - 2L\beta \right) \right\} \quad (4.6.4)'$$

尚上記の  $G_i$  の値は(4.6.2)の  $G_i$  に等しい事に注意を要する。然して(4.6.5)'を見れば明かな如く短時間域の特性を改善する為には亦4.64図の回路に在つては  $R_1$  を小さくする必要があるも之れは  $G$  の値従つて利得を減小さめすること(4.6.2)及び(4.6.4)'に示す通りである。之れに反して亦4.6.3図の回路に在つては寧ろ  $R_1$  は大なる方が望ましく利得( $G_i$  の値)もそれに依りて増大する事は甚だ好都合である。然し  $R_1$  を無暗に大にすれば利得はいくらに増える通りである。一方短時間域の特性改善の今一つの方途として  $L$  を小ならしめれば、(4.6.5)'式より明かな如く一應その目的を達し得るかの如くに観せられるが、之れが過度に失うと  $A_2, A_3$  は共に実数となり

$$A_2, A_3 = \alpha \pm j\gamma, \quad \alpha = \frac{R_1}{2L}, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \frac{R_0^2}{L C_2 R_2 R_a}}$$

となる。今極端な場合として  $\alpha^2 \gg R_0^2 / L C_2 R_2 R_a$  と仮定すれば

$$\alpha - \gamma = \frac{R_0^2}{C_2 R_1 R_2 R_a} \cong \frac{1}{C_2 R_1}$$

となり結局(4.6.2)式の  $A_2$  そのものとなり特性改善の役をなさぬ。之に反し今の場合  $A_2, A_3$  を複素数となし短時間域に對する  $A(f)$  に多少の振動を生じ付與する方が却つて好ましいのであつて、以下  $\beta \neq 0$  及び  $\beta = 0$  の二つの場合に就て吟味しよう。

[A]  $\beta \neq 0$  なる場合

上述せる處より明かな如く今の場合には

\*  $C_1$  が  $C_1/C_2 \geq (R_2 + R_a)/R_1$  なる関係を満足すれば(4.6.8)の條件が成立するが、其の關係は通常完全に満足される。



$$A_1 \ll |A_2| = |A_3|$$

(4.6.9)

これを以て(4.5.25)式に於て

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &\cong 0 \\ \delta_{12} &\cong \delta_{13} \cong 0, \quad \delta_{21} \cong \delta_{31} \cong 1 \end{aligned} \right\}$$

又通常の使用状態では  $\alpha t_0$  は充分大にて

$$(-A_1 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \cong 0^* \quad (l=2,3)$$

(4.6.9)'

と見做す事が出来るから、 $t_0 \geq \tau > 0$  に対しては

$$Q_1 = m-1 C_A \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-2} \frac{m-1 C_{A+l}}{m-1 C_A} (-A_1 t_0)^l B_l(A_1 t_0) \right\}$$

$$Q_2 = (-1)^{m-2} \sum_{h=0}^{m-2} \frac{m-2 C_h}{m+h-1} C_h (\delta_{23})^h \sum_{j=0}^{m-2-h} m C_j (\delta_2)^j$$

$$Q_3 = (-1)^{m-2} \sum_{h=0}^{m-2} \frac{m-2 C_h}{m+h-1} C_h (\delta_{32})^h \sum_{j=0}^{m-2-h} m C_j (\delta_3)^j$$

(4.6.10)

従つて(4.5.24)式より

$$S_1'(\tau) = e^{-A_1 \tau} \sum_{A=0}^{m-1} \frac{m C_A}{A!} (-A_1 \tau)^A \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-2} \frac{m-1 C_{A+l}}{m-1 C_A} (-A_1 t_0)^l B_l(A_1 t_0) \right\} \quad (4.6.11)$$

上記の値は(4.3.7)の夫に全く同じであつて(4.3.2)図及び(4.3.1)表に挿へられてゐる。

一方

$$S_2'(\tau) = (-1)^{m-1} e^{-A_2 \tau} \sum_{A=0}^{m-1} \frac{(A_2 \tau)^A}{A!} \sum_{h=0}^{m-2} \frac{m-2 C_h}{m+h-1} C_h (\delta_{23})^h \sum_{j=0}^{m-2-h} m C_j (\delta_2)^j \quad (4.6.12)$$

にて  $S_3'(\tau)$  は  $S_2'(\tau)$  に共軛である。

然るに(4.6.9)の條件を(4.5.26)式に代入すれば

$$\frac{G_2}{G_1} \cong \frac{A_3}{(A_2 - A_1)} \frac{(A_2 - R/L)}{R/L} = \eta; \quad \frac{G_3}{G_1} \cong \frac{A_2}{(A_2 - A_1)} \frac{(A_3 - R/L)}{R/L} = \tilde{\eta} \quad (4.6.13)$$

但し  $\tilde{\eta}$  は  $\eta$  の共軛數を意味する。従つて所要の周期的定常インデシャル増幅率  $S(\tau)$  は次式にて與へられる。

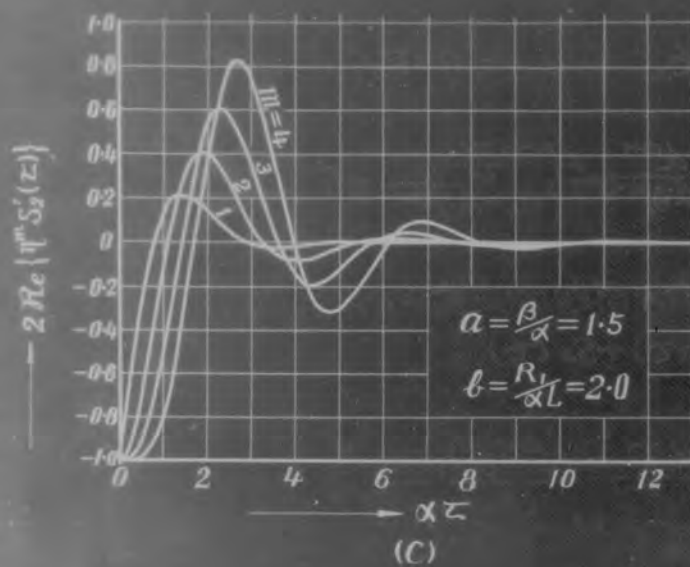
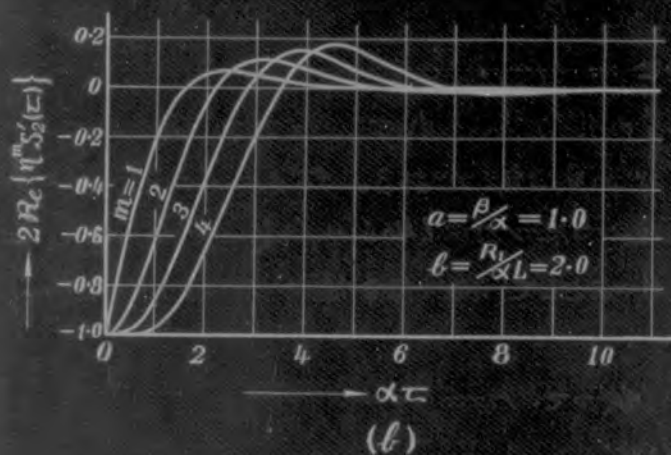
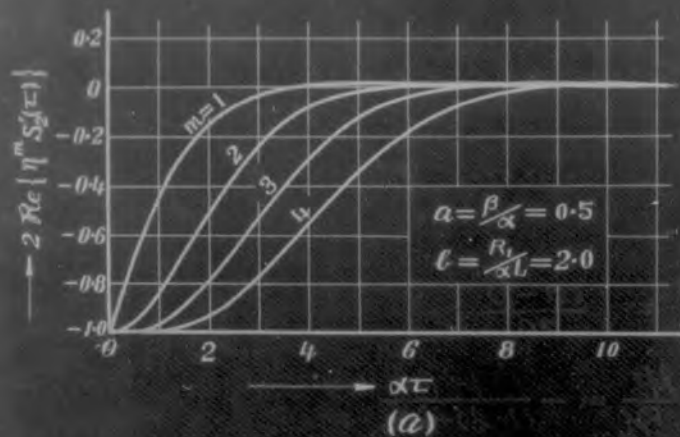
$$\begin{aligned} S(\tau) &= G_1^m \{ S_1'(\tau) + \eta^m S_2'(\tau) + \tilde{\eta}^m S_3'(\tau) \} \\ &= G_1^m \{ S_1'(\tau) + 2 \operatorname{Re}(\eta^m S_2'(\tau)) \} \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

但し  $G_1$  は既述の如く

$$G_1 = -\mu R_1 R_2 / R_0^2 = -g_m R_1 \quad \{ (4.6.12) \text{式参照} \}$$

然るに前述せるが如く(4.6.14)式中の  $S_1'(\tau)$  は(4.3.2)図及び(4.3.1)表に挿へられてゐる

\* 此の關係式が満足される様な  $t_0$  でなければ無き増幅は到底望み得ない。



第 4.6.4 圖

故,  $2\operatorname{Re}\{\eta^m S_2'(t)\}$  の値を求めれば, 之れと  $S_1'(t)$  との代数和として所望の  $S(t)$  の値を知ることが出来る。今簡単の爲に

$$\beta/\alpha = a, \quad R_1/\alpha L = b \quad (4.6.15)$$

と置き,  $A_2 = \alpha + j\beta$ ,  $A_3 = \alpha - j\beta$  と考えれば

$$\left. \begin{aligned} \eta_{23} &= \frac{\alpha + j\beta}{2j\beta} = \frac{(a-j)}{2a} \\ \delta_2 &= -\frac{\alpha + j\beta}{\alpha + j\beta - R_1/L} = -\frac{1+j a}{(1-b)+j a} \\ \eta &= -\frac{(\alpha - j\beta)}{2j\beta} \frac{(\alpha + j\beta - R_1/L)}{R_1/L} = \frac{-ab + j(1+a^2-b)}{2ab} \\ A_2\tau &= (\alpha + j\beta)\tau = (1+ja)\alpha\tau \end{aligned} \right\} \quad (4.6.16)$$

となるを以て,  $a$  及び  $b$  の値を與へれば,  $\alpha\tau$  を横軸に取つて  $2\operatorname{Re}\{\eta^m S_2'(t)\}$  の値を曲線に求める事が出来る筈である。然るに  $b$  の値は (4.6.4) 式より日月がなほ  $b < 2$  なるも今の増幅率に於ては (4.6.4)' 式に示す如く  $b = R_1/\alpha L \cong 2$  と見做し得る。亦 4.6.4 圖は  $b=2$  として 種々な  $a$  の値の  $\alpha$  に対して  $2\operatorname{Re}\{\eta^m S_2'(t)\}$  を曲線に描いたものである。

[B]  $\beta=0$  なる場合 (従つて  $A_2=A_3=\alpha$ )

今の場合には (7.5.16) 式は

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{-1} A(t) &= \frac{p^m \{A_1 p + B\}^m}{(p+A_1)^m (p+A_2)^{2m}} \\ A &= -g_m/c_2 \quad B = -g_m R_1/L c_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.6.17)$$

従つて

$$A(t) = A^m \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_1^{m-1}} \frac{A_1^{m-1} (R_1/L - A_1)^m}{(A_2 - A_1)^{2m}} e^{-A_1 t} + \frac{(-1)^m}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dA_2^{2m-1}} \frac{A_2^{m-1} (R_1/L - A_2)^m}{(A_1 - A_2)^m} e^{-A_2 t} \right\} \quad (4.6.18)$$

となる。従つて今の場合の周期的定常インデシヤル増幅率  $S(t)$  を

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) \quad (4.6.19)$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} S_1(t) &= \frac{A^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_1^{m-1}} \frac{A_1^{m-1} (R_1/L - A_1)^m}{(A_2 - A_1)^{2m}} \varphi(A_1 t) \\ S_2(t) &= \frac{(-A)^m}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dA_2^{2m-1}} \frac{A_2^{m-1} (R_1/L - A_2)^m}{(A_1 - A_2)^{2m}} \varphi(A_2 t) \end{aligned} \right\} \quad (4.6.20)$$

但し上式中の  $\varphi(A\tau)$  は (4.3.2) 式にて與へられる。然るに

$$\begin{aligned} & \frac{A^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_1^{m-1}} \frac{A_1^{m-1} (R/L - A_1)^m}{(A_2 - A_1)^{2m}} e^{-A_1 \tau} \\ &= G_1^m e^{-A_1 \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(-A_1 \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{h=0}^{m-\delta-1} \frac{m-\delta-1}{2m+h-1} C_h (-r_{12})^h \sum_{k=0}^{m-\delta-h-1} m C_k^{m-1} C_{\delta+h+k} (-\delta_1)^k \quad (4.6.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_1^{m-1}} \frac{A_1^{m-1} (R/L - A_1)^m}{(A_2 - A_1)^{2m}} \frac{e^{-A_1 t_0}}{1 - e^{-A_1 t_0}} e^{-A_1 \tau} \\ &= G_1^m e^{-A_1 \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(-A_1 \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{h=0}^{m-\delta-1} \frac{m-\delta-1}{2m+h-1} C_h (-r_{12})^h \sum_{k=0}^{m-\delta-h-1} m C_k (-\delta_1)^k \\ & \quad \times \sum_{\ell=0}^{m-\delta-h-k-1} \frac{m-\delta-h-k-1}{m-1} C_{\delta+h+k+\ell} (-A_1 t_0)^\ell B_\ell(A_1 t_0) \quad (4.6.22) \end{aligned}$$

なるを以て,  $t_0 \geq \tau > 0$  なる  $\tau$  に対して \*

$$S_1(\tau) = G_1^m e^{-A_1 \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(-A_1 \tau)^\delta}{\delta!} Q_1 \quad (4.6.23)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{h=0}^{m-\delta-1} \frac{m-\delta-1}{2m+h-1} C_h (-r_{12})^h \sum_{k=0}^{m-\delta-h-1} m C_k^{m-1} C_{\delta+h+k} (-\delta_1)^k \\ & \quad \times \left\{ 1 + \sum_{\ell=0}^{m-\delta-h-k-1} \frac{m-\delta-h-k-1}{m-1} C_{\delta+h+k+\ell} (-A_1 t_0)^\ell B_\ell(A_1 t_0) \right\} \quad (4.6.24) \end{aligned}$$

但し

$$G_1 = \frac{A(R/L - A_1)}{(A_2 - A_1)^2} \quad (4.6.25)$$

にて  $r_{12}$  及び  $\delta_1$  は夫々 (4.4.7) 及び (4.5.29) にて與へられた値を意味する。茲に前述せる如く

$$A_1 \ll A_2 \quad \text{従つて又} \quad A_1 \ll R/L$$

なるを以て

$$G_1 = \frac{R_1 A}{L A_2^2} = - \frac{U R_1 R_2}{R_0^2} = -g_m R_1 \quad \left\{ (4.6.4) \text{ 式の } G_1 \text{ に同じ} \right\} \quad (4.6.26)$$

$$r_{12} \cong 0, \quad \delta_1 \cong 0$$

と見做し得るから結局 (4.6.24) 式は

$$Q_1 = m-1 C_\delta \left\{ 1 + \sum_{\ell=0}^{m-\delta-1} \frac{m-1 C_{\delta+\ell}}{m-1 C_\delta} (-A_1 t_0)^\ell B_\ell(A_1 t_0) \right\} \quad (4.6.24)'$$

となり既述の (4.6.10) の  $Q_1$  と同じである。一方  $S_2(\tau)$  は

\* 今の場合にも  $S_1(\tau)$  及び  $S_2(\tau)$  (従つて  $S(\tau)$  も) は何れも  $t_0$  を周期とする周期函数なるを以て  $t_0 \geq \tau > 0$  なる範囲のみを考へれば充分である。

$$\frac{(-A)^m d^{2m-1}}{(2m-1)! dA_2^{2m-1}} \frac{A_2^{m-1} (R/L - A_2)^m}{(A_1 - A_2)^m} e^{-A_2 \tau}$$

$$= G_2^m e^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{2m-1} \frac{(-A_2 \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{k=0}^{m-1} m C_k (-\delta_2)^k \sum_{\substack{r=0 \\ r \sim m-\delta-k}}^{2m-\delta-k-1} m+k-1 C_r m-1 C_{2m-\delta-k-r-1} (-\delta_1)^{m-k-r-1} \quad (4.6.27)$$

但し  $\sum_{k=0}^{m-1}$  なる記号は  $k=0$  より  $m$  或は  $2m-1-\delta$  の中何れか一方の値までの  $k$  の値に就いて和を取る事を意味する。一方  $\sum_{r=0}^{2m-\delta-k-1}$  なる記号は  $0$  或は  $m-\delta-k$  の何れ

か大なる方の値より  $2m-\delta-k-1$  までの  $r$  の値に就いて和を取ることを意味する。然るに  $k > m$  なる  $k$  の値に対しては  $m C_k = 0$  となるから

$$\sum_{k=0}^{m-1} m C_k (-\delta_2)^k = \sum_{k=0}^{2m-1-\delta} m C_k (-\delta_2)^k$$

と表す事が出来る。一方  $0 < k < m-\delta-k$  の  $k$  の値に対して

$$m-1 C_{2m-\delta-k-r-1} = 0$$

なるを以て

$$\sum_{k=0}^{2m-\delta-k-1} m+k-1 C_k m-1 C_{2m-\delta-k-r-1} (-\delta_1)^{m-k-r-1} = \sum_{k=0}^{2m-\delta-k-1} m+k-1 C_k m-1 C_{2m-\delta-k-r-1} (-\delta_1)^k$$

となる。従って

$$\frac{(-A)^m d^{2m-1}}{(2m-1)! dA_2^{2m-1}} \frac{A_2^{m-1} (R/L - A_2)^m}{(A_1 - A_2)^m} e^{-A_2 \tau}$$

$$= G_2^m e^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{2m-1} \frac{(-A_2 \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{k=0}^{2m-\delta-1} m C_k (-\delta_2)^k \sum_{r=0}^{2m-\delta-k-1} m+k-1 C_r m-1 C_{2m-\delta-k-r-1} (-\delta_1)^k \quad (4.6.27)'$$

同様にして

$$\frac{(-A)^m d^{2m-1}}{(2m-1)! dA_2^{2m-1}} \frac{A_2^{m-1} (R/L - A_2)^m}{(A_1 - A_2)^m} \frac{e^{-A_2 t_0}}{1 - e^{-A_2 t_0}} e^{-A_2 \tau}$$

$$= G_2^m e^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{2m-1} \frac{(-A_2 \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{k=0}^{2m-\delta-1} m C_k (-\delta_2)^k \sum_{r=0}^{2m-\delta-k-1} m+k-1 C_r m-1 C_{2m-\delta-k-r-1} (-\delta_1)^k$$

$$\times \sum_{l=0}^{2m-\delta-k-r-1} m-1 C_{2m-\delta-k-r-l-1} (-A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \quad (4.6.28)$$

従って

$$S_2(\tau) = G_2^m e^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{2m-1} \frac{(-A_2 \tau)^\delta}{\delta!} Q_2 \quad (4.6.29)$$

$$Q_2 = \sum_{k=0}^{2m-\delta-1} m C_k (-\delta_2)^k \sum_{r=0}^{2m-\delta-k-1} m+k-1 C_r m-1 C_{2m-\delta-k-r-1} (-\delta_1)^k$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{2m-\delta-k-r-1} \frac{m-1 C_{2m-\delta-k-r-l-1}}{m-1 C_{2m-\delta-k-r-1}} (-A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) \right\} \quad (4.6.30)$$



$$G_2 = \frac{A(R/L - A_2)}{A_2(A_2 - A_1)} \quad (4.6.31)$$

となる。然るに既に述べた如く  $A_1 \ll A_2 = 1$  かつ  $t_0$  が充分大ならば

$$\left. \begin{aligned} G_2 &\cong \frac{A(R/L - A_2)}{A_2^2} \\ \gamma_{21} &\cong 1 \\ (A_2 t_0)^l B_l(A_2 t_0) &\cong 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6.32)$$

1=12, 且つ

$$\sum_{k=0}^{2m-\delta-k-1} (-1)^k m+k-1 C_k m-1 C_{2m-\delta-k-k-1} = (-1)^{2m-\delta-k-1} \quad (4.6.33)$$

なるを以て (4.6.30) 式は

$$Q_2 \cong (-1)^{\delta+1} \sum_{k=0}^{2m-\delta-1} m C_k (\delta_2)^k \quad (4.6.34)$$

上式を (4.6.29) 式に代入すれば

$$S_2(\tau) = -G_2^m e^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{2m-1} \frac{(A_2 \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{k=0}^{2m-\delta-1} m C_k (\delta_2)^k \quad (4.6.29)'$$

従つて

$$S(\tau) = G_1^m \{ S_1'(\tau) + \eta^m S_2'(\tau) \} \quad (4.6.19)'$$

と置けば, (4.6.23), (4.6.24)' 及び (4.6.29)' 式より

$$\left. \begin{aligned} S_1'(\tau) &= e^{-A_1 \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} m-1 C_\delta \frac{(-A_1 \tau)^\delta}{\delta!} \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-\delta-1} \frac{m-1 C_{\delta+l}}{m-1 C_\delta} (-A_1 t_0)^l B_l(A_1 t_0) \right\} \\ S_2'(\tau) &= -e^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{2m-1} \frac{(A_2 \tau)^\delta}{\delta!} \sum_{k=0}^{2m-\delta-1} m C_k (\delta_2)^k \\ \eta &= \frac{(R/L - A_2)}{R/L}, \quad \delta_2 = \frac{A_2}{R/L - A_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.6.35)$$

となる。然るに上記の  $S_1'(\tau)$  は既に述べた如く一回路増幅器の周期的定常インデシヤル増幅率 1=12 及び (4.3.2) 図及び (4.3.1) 表に示されてゐる。一方  $\eta^m S_2'(\tau)$  なる値は

$$B = R/L A_2 L = R/\alpha L$$

なる値が"定まれば"

$$\delta_2 = 1/(B-1), \quad \eta = (B-1)/B \quad (4.6.36)$$

なるを以て所要の  $\eta^m S_2'(\tau)$  の値が定まる筈である。

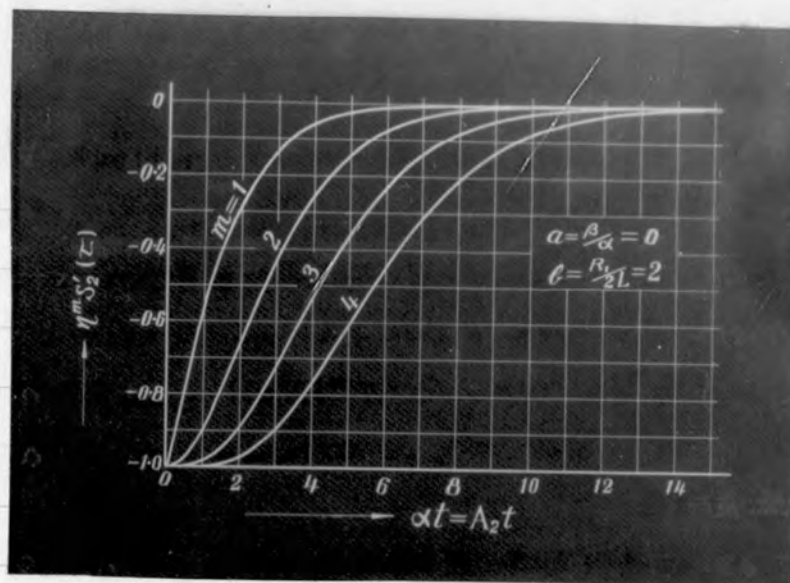
尚之れが数値計算に際しては次の関係を利用すると便利である。即ち

$$\sum_{k=0}^m m C_k (\delta_2)^k = (1 + \delta_2)^m = \left( \frac{B}{B-1} \right)^m = \left( \frac{1}{\eta} \right)^m \quad (4.6.37)$$

1=12 且つ  $k \geq m+1$  なる  $k$  に対しては  $m C_k = 0$  なるを以て

$$\eta^m S_2'(\tau) = -e^{-A_2 \tau} \left[ \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(A_2 \tau)^\delta}{\delta!} + \sum_{\delta=m}^{2m-1} \frac{(A_2 \tau)^\delta}{\delta!} \right] \eta^m \sum_{k=0}^{2m-\delta-1} m C_k (\delta_2)^k \quad (4.6.38)$$

然るに上式右辺の第1項  $e^{-A_2 \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(A_2 \tau)^\delta}{\delta!}$  なる値は既に (4.4.13) 式に示した値で (4.4.1) 図が夫である。従つて第2項のみを計算すれば所要の  $\eta^m S_2'(\tau)$  を求める事が出来る。 (4.6.5) 図が夫を示す。但し同図に在っては (4.6.4) 図に於けると同様の理



第 4.6.5 圖

由に依り  $\beta = 2$  としてある。

以上にて所定の計算を終へたので、之等の結果に基づき長時間域並に短時間域の過渡特性について吟味しよう。

既に屢述せる如く、 $S(\tau)$  に於て  $t_0 = \infty$  と置けば、単位函数入力に対する出力、換言せば、所謂過渡現象  $A(\tau)$  を得る。即ち (4.6.14) 及び (4.6.19) より

$$A(\tau) = \begin{cases} G_1^m \{ S_1'(\tau) + 2 \operatorname{Re} (\eta^m S_2'(\tau)) \} & t_0 = \infty & \alpha \neq 0 \\ G_1^m \{ S_1'(\tau) + \eta^m S_2'(\tau) \} & t_0 = \infty & \alpha = 0 \end{cases} \quad (4.6.39)$$

### 1. 長時間域の過渡現象

$A_1 \ll \operatorname{Re}(A_2)$  なるを以て長時間域の過渡現象の考察に當つては  $S_2'(\tau)$  なる項を無視して差支へなく、 $\alpha$  の値の如何に拘らず

$$A(\tau) = G_1^m S_1'(\tau)_{t_0=\infty} = G_1^m e^{-A_1 \tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(-A_1 \tau)^\delta}{\delta!} C_{\delta} \frac{(-A_1 \tau)^\delta}{\delta!}$$

となり、上式は (4.3.9) 式に一致し、亦 4.3.2 図 (e) が夫である。之に就ては前述せる處で、茲に再述する位もあるまい。

### 2. 短時間域の過渡現象

短時間域即ち  $\tau = 0$  の極く近傍に於ける  $A(\tau)$  の考察に當つては

$$S_1'(\tau)_{t_0=\infty} = 1$$

と見做し得る。一方  $2 \operatorname{Re} \{ \eta^m S_2'(\tau) \}_{t_0=\infty}$  或は  $\eta^m S_2'(\tau)_{t_0=\infty}$  なる値は夫々 4.6.4 図及び 4.6.5 図に示されてゐる故<sup>\*</sup>、之等の縦軸の目盛を 1 に増加しつすれば、直ちに短時間域の過渡現象  $A(\tau)/G_1^m$  を與へることになる。従つて今の場合の過渡現象は次の性質を有する事が分る。

(a)  $\alpha \neq 0$  なる時は  $A(\tau)$  は多々共振動的となる。

(b)  $\alpha \approx 1.0$  より小なる値の  $\alpha$  に対する  $A(\tau)$  は、振動性は極めて微弱で、最高値も段數には殆んど無関係である。(今の場合の段數の程度に対して)

(c)  $\alpha$  が凡そ 1.5 より大なる時は  $A(\tau)$  の振動性は段數の増加と共に急激に顯著となり、最高値は段數の増加に伴ひ著しく大となる。

尚之等の図を 4.4.1 図と比較すれば、 $L$  の挿入に依つて短時間域の過渡特性が如何に改善されるかを察知出来る。然し此の時に當つては次の事に注意すべきである。即ち横軸に選んだ  $A_2 \tau$  及び  $\alpha \tau$  の  $A_2$  及び  $\alpha$  の値が夫々の図に依つて異なるので横軸の目盛を  $A_2$  或は  $\alpha$  の値の大きさの比に応じて適当に伸縮して比較しければならない。以下之の比率を考へて見よう。(4.6.15) 及び (4.6.4) より

$$\alpha = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{2R_0^2}{\alpha C_2 R_2 R_2 R_1} - 1} \quad (4.6.40)$$

\* 次頁脚註参照。

従って

$$\alpha = \frac{2K}{a^2+1} \quad \text{但し} \quad K = \frac{R_0^2}{C_2 R_a R_2 R_1} \cong \frac{1}{C_2 R_1} \quad (4.6.41)$$

を得る。但し  $K$  は  $L$  には無関係に  $(4.6.2)$  式の  $A_2$  に等しく  $\phi 4.4.1$  図の横軸に取った  $A_2$  が夫である。従って

$$K: \alpha_{a=0}: \alpha_{a=0.5}: \alpha_{a=1.0}: \alpha_{a=1.5} = 1: 2: 1.6: 1: 5/13 \quad (4.6.42)$$

但し  $\alpha_{a=a}$  なる記号は  $a=a$  なる場合の  $\alpha$  の値を意味する。即ち  $\phi 4.4.1$  図,  $\phi 4.6.5$  図及び  $\phi 4.6.4$  図 (A), (B), (C) の比較に当ってはその順に横軸の目盛を上記の比に拡大して考へなければならぬ。其れを考へる時は之等の図より  $L$  の挿入に依つて如何なる特性が改善されるか一見して明かとなる。之れよりすれば一般には大体的見当として段数が  $1 \sim 2$  段の時は  $a \cong 0 \sim 1.5$ , 段数が  $4$  段の場合には  $a \cong 0.5 \sim 1.0$  が直当と考へられる。然して斯る  $a$  の値に対しては過渡時間  $L$  を挿入せぬ場合の  $L$  を  $1/2$  に短縮される事が分る。

次ぎに此の場合に挿入すべき  $L$  の値を求むるに  $(4.6.41)$  及び  $(4.6.4)$  式より

$$L = \frac{a^2+1}{4K} R_1 \cong \frac{a^2+1}{4} C_2 R_1^2 \quad (4.6.43)$$

となるから  $a=0 \sim 1.5$  及び  $a=0.5 \sim 1.0$  とする為には必要な  $L$  の値は夫々

$$\left. \begin{aligned} L &= (0.25 \sim 0.8) C_2 R_1^2 & (a=0 \sim 1.5) \\ L &= (0.3 \sim 0.5) C_2 R_1^2 & (a=0.5 \sim 1.0) \end{aligned} \right\} \quad (4.6.44)$$

となる。

然るに A. V. Bedford 及び G. L. Frendall<sup>(12)</sup> は段数が  $16 \sim 64$  段の場合に就いて短時間域の過渡特性を計算し

$$L = (0.386 \sim 0.439) C_2 R_1^2$$

なる  $L$  を推奨してゐるが段数が小なうは今少し融通性を與へても差支へない。

$\phi 4.6.5$  図及び  $\phi 4.6.4$  図の  $S_2(t)$  は  $(A_2 t)^2 B_2(A_2 t_0) \cong 0$  なる仮定を設けたが  $t_0 = \infty$  ならは此の仮定は完全に満足される。

## 第5章 高周波多段増幅器の過渡現象と周期的信号波の増幅特性<sup>(15)</sup>

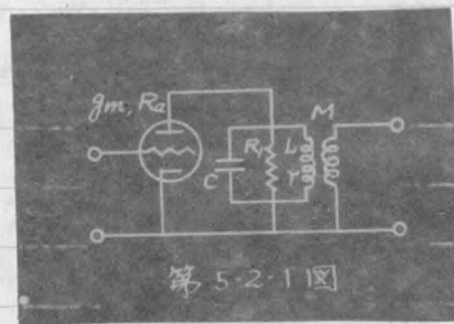
### 5.1 序説

多段高周波増幅器の過渡現象の解析は低周波増幅器と同様、位相並いに利得の周波数特性を、解析が可能な範囲で、種々の形に理想化して計算されているが、斯る周波数特性特に位相特性の理想化の結果、例へば「信号波入来以前に出力が現れる等物理的に矛盾せる結果に到達する事があり、然も理想化せられた周波数特性の實在の回路に対する近似度の過渡出力波形に及ぼす影響が全く不明で斯る方法で得られる解析結果は大体的見当を失はるに過ぎない。従つて最近に於けるかゝる厳密な過渡出力波形を知る要求に対しては、斯る方法は不充分で、具体的な回路に就いて厳密に過渡現象を解析する必要がある。之に關しては既に奥吉川<sup>(16)</sup>氏及び森脇<sup>(17)</sup>氏の研究がある。即ち前者は多段結合回路増幅器を直流で励振せる場合、並に該増幅器の中央周波数に同調せる高周波入力を加へた場合の出力の包絡線を求め、後者は種々の中間周波増幅器に就いて同調時及び離調時の過渡包絡出力、並に遅延時間を求め、之を利用して、パルス幅、周波数特性の開閉及び離調度と包絡出力との関係が詳細に論ぜられてゐる。此の両研究は、何れも演算子法を利用して、厳密な解を求められたものであるが、その計算に當つて行はれた省略は、定常状態に対しては何等差支へなく充分の精度を有するが、過渡出力に対して如何なる影響を有するかが明かではなく、かゝるに之等は例へば  $e^{j\omega t}H(\omega)$  なる入力に対する過渡包絡出力 既ち所謂過渡現象の計算である事に全監みて、本章に於て本章並に第2章に説く解析法に従つて各種の高周波増幅器に就いて周期的包絡インデシャル増幅率を求め、これより上述の所謂過渡現象及び周期的入力に対する包絡出力波形を求めると共に筆者並に上記の森脇氏の解析結果の誤差に就いて論じようと思ふ。

### 5.2 種々の高周波増幅器の包絡インデシャル増幅率の函数

既に第3.6.1表に種々の高周波単段増幅器の包絡インデシャル増幅率の函数を示して置いたが、本節に於ては、之が計算法並にその誤差を吟味し、併せて多段増幅器に就いて検討して見よう。





第 5-2-1 图

扱て  $E^{j\omega t} H(t)$  なる入力に対する出力は (2.2.8) 式にて與へられる。とて既述の如くで“  
包絡インデシヤル量 (今の場合には増幅率) を  $u(t)$ ; その  $p$  函数を  $\Pi(p)$  とせば夫々 (2.  
2.12) 及び (2.2.17) 式にて與へられる。以下簡單の爲に (2.2.8) 式右辺の括弧内  
の中  $\Pi(p)$  を除いた残りの項を

$$\left. \begin{aligned} R(p) &= \sum_i \frac{\tilde{G}_i'}{p + \alpha_i + j(\beta_i + \omega)} \\ u(t) &= \sum_i R(p) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1)$$

にて表す事とする。

### [A] 1 回路増幅器

一例として 5.2.1 図に示す単一同調回路増幅器を例に取つて説明しよう。本回  
路は既に 3.3 に述べた如くそのインデシヤル増幅率の  $p$  函数は

$$\left. \begin{aligned} A(p) &= \frac{-g_m M R_i' p}{R_i' L C p^2 + (R R_i' C + L) p + R_i' + r} \\ R_i' &= R_a R_i / (R_a + R_i) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2)$$

にて與へられる。今簡單の爲に

$$\left. \begin{aligned} 1/\sqrt{LC} &= \omega_0 \quad \omega_0 L/r = Q_L \quad \omega_0 C R_i' = Q_C \\ \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} &= \frac{1}{Q}, \quad 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \delta \end{aligned} \right\} \quad (5.2.3)$$

と置き  $Q^2 \gg 1$  と仮定すれば

$$A(p) = \frac{-g_m \omega_0^2 M p}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0)(p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0)} = \frac{-g_m \omega_0^2 M}{2} \left\{ \frac{(1 + j/2Q)}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0)} + \frac{(1 - j/2Q)}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0)} \right\} \quad (5.2.2')$$

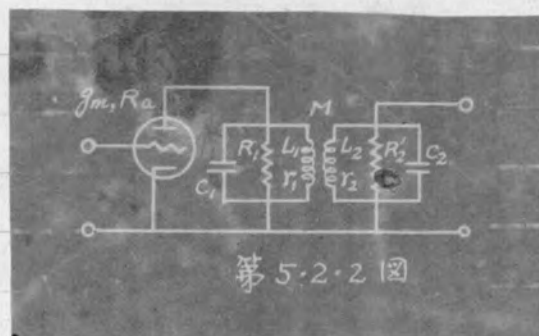
上式は (2.2.5) 式に対応するものである。従つて今の場合には

$$\Pi(p) = \frac{GA}{p+A}, \quad R(p) = \frac{G'B}{p+B} \quad (5.2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\omega_0}{2Q} (1 + j\delta) & B &= \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0 (2 + \frac{\delta}{2Q}) \\ G &= -\frac{g_m \omega_0 M Q}{(1 + j\delta)} (1 + j/2Q) & G' &= -\frac{g_m \omega_0 M (1 - j/2Q)}{2 \{ \frac{1}{2Q} + j(2 + \frac{\delta}{2Q}) \}} \\ &\cong -g_m \omega_0 M Q / (1 + j\delta) & &\cong j \frac{g_m \omega_0 M}{4(1 + \frac{\delta}{4Q})} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.5)$$

従つて

$$u(t) = G(1 - E^{-At}), \quad u(t) = G'(1 - E^{-Bt}) \quad (5.2.6)$$



然して  $u(t)$  に対して  $v(t)$  を無視することの誤差を (2.2.16) 式と同様

$$\Gamma = \left| \frac{v(t)}{u(\infty)} \right| \quad (5.2.7)$$

と定義すれば (5.2.5) 及び (5.2.6) 式より

$$\Gamma = \frac{\sqrt{1+\delta^2}}{4Q} (1 + e^{-\tau}) \quad , \quad \tau = \omega_0 t / 2Q \quad (5.2.8)$$

従って

$$\frac{\sqrt{1+\delta^2}}{4Q} \leq \Gamma \leq \frac{\sqrt{1+\delta^2}}{2Q} \quad (5.2.9)$$

$Q$  が充分大にして  $\delta$  が充分小ならば  $v(t)$  は実用上無視して差支へない言である。

尚 3.6.2 表に示すが如き其の他の形式の単一同調回路増幅率に於いても同様である。

[B] 2 回路増幅率

が 5.2.2 図に示すが如き結合回路増幅率を例として取ると

$$\left. \begin{aligned} A(p) &= \frac{-g_m M p}{(L_1 p + R_1)(L_2 p + R_2) Y_1(p) Y_2(p) - M^2 p^2 (C_1 p + \frac{1}{R_1'}) (C_2 p + \frac{1}{R_2'})} \\ Y_1(p) &= C_1 p + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{L_1 p + R_1} \quad , \quad Y_2(p) = C_2 p + \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{L_2 p + R_2} \\ R_1' &= R_a R_1 / (R_a + R_1) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.10)$$

以下簡単な考に

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}} &= \omega_i \quad , \quad Q_{Li} = \frac{\omega_i L_i}{r_i} \quad , \quad Q_{Ci} = \omega_i C_i R_i' \quad , \\ \frac{1}{Q_i} &= \frac{1}{Q_{Li}} + \frac{1}{Q_{Ci}} \quad , \quad \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = k \quad , \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad (5.2.11)$$

と表はせば、斯る回路に於ては通常

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_0 \quad , \quad Q_1 = Q_2 = Q \quad , \\ Q^2 \gg 1 \quad , \quad k^2 \ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.2.12)$$

なるを以て

$$\begin{aligned} A(p) \cong & \frac{-g_m \omega_0^2 k \sqrt{L_1 L_2} p}{\{p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0(1 - \frac{k^2}{2})\} \{p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(1 - \frac{k^2}{2})\} \{p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0(1 + \frac{k^2}{2})\}} \\ & \times \frac{1}{\{p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(1 + \frac{k^2}{2})\}} \quad (5.2.13) \end{aligned}$$

$$= \frac{-g_m \omega_0^2 \sqrt{L_1 L_2}}{4} \left\{ \frac{1}{\{p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0(1 - \frac{R}{2})\}} - \frac{1}{\{p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(1 + \frac{R}{2})\}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\{p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(1 - \frac{R}{2})\}} - \frac{1}{\{p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(1 + \frac{R}{2})\}} \right\} \quad (5.2.14)$$

従って

$$kQ = b, \quad 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \delta \quad (5.2.15)$$

と置けば

$$\Pi(p) = \frac{G_1 A_1}{p + A_1} + \frac{G_2 A_2}{p + A_2} = \frac{G A_1 A_2}{(p + A_1)(p + A_2)} \quad (5.2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -\frac{g_m \omega_0 \sqrt{L_1 L_2} Q}{2\{1 + j(\delta - b)\}}, & G_2 &= \frac{g_m \omega_0 \sqrt{L_1 L_2} Q}{2\{1 + j(\delta + b)\}} \\ A_1 &= \frac{\omega_0}{2Q} \{1 + j(\delta - b)\}, & A_2 &= \frac{\omega_0}{2Q} \{1 + j(\delta + b)\} \\ G &= \frac{-j g_m \omega_0 \sqrt{L_1 L_2} Q}{(1 - \delta^2 + b^2 + j2\delta)} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.17)$$

一方同様にして

$$R(p) = \frac{G' B_1 B_2}{(p + B_1)(p + B_2)} \quad (5.2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(2 - \frac{R}{2}), & B_2 &= \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(2 + \frac{R}{2}) \\ G' &= \frac{j g_m \omega_0 \sqrt{L_1 L_2} k}{16} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.19)$$

従って今の場合には

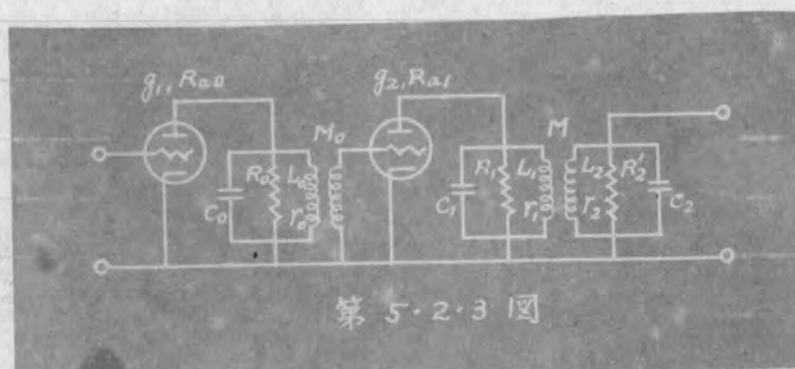
$$\left. \begin{aligned} u(t) &= G \left\{ 1 - \frac{A_2}{A_2 - A_1} e^{-A_1 t} + \frac{A_1}{A_2 - A_1} e^{-A_2 t} \right\} \\ v(t) &= G' \left\{ 1 - \frac{B_2}{B_2 - B_1} e^{-B_1 t} + \frac{B_1}{B_2 - B_1} e^{-B_2 t} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.20)$$

なるを以て、 $u(t)$ に対して $v(t)$ を無視する誤差は、 $\omega_0 t / 2Q = \tau$ と置けば

$$\Gamma = \left| \frac{v(t)}{u(\infty)} \right| = \frac{\sqrt{(1 + b^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2}}{16Q^2} \left| \frac{v'(t)}{u'(\infty)} \right| \quad (5.2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} |v'(t)| &= |v(t)/G'| = 1 + e^{-\tau} \sqrt{\omega_0^2 b^2 \tau + \frac{16}{k^2} \sin^2 b \tau} \\ |u'(\infty)| &= |u(\infty)/G| = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.2.22)$$





然るに  $|h'(t)|$  の最大値は  $\tau = \frac{1}{b} \tan^{-1} b$  の時に生じ、その値は

$$|h'(t)|_{\max} \cong 1 + \frac{8Q\varepsilon - \frac{1}{b} \tan^{-1} b}{\sqrt{1+4b^2}} \quad (2.2.23)$$

となる。一方  $|h'(t)|$  の最小値は明かに  $\tau = \infty$  で "1" である。従って

$$\frac{\sqrt{(1+b^2-\delta^2)^2+4\delta^2}}{16Q^2} \leq \Gamma \leq \frac{\sqrt{(1+b^2-\delta^2)^2+4\delta^2}}{16Q^2} \left\{ 1 + \frac{8Q\varepsilon - \frac{1}{b} \tan^{-1} b}{\sqrt{1+4b^2}} \right\} \quad (5.2.24)$$

となる。今若し  $Q$  が充分大ならば

$$|h'(t)|_{\max} \cong 8Q\varepsilon^{\frac{1}{b} \tan^{-1} b} / \sqrt{1+4b^2} \quad (5.2.23)'$$

を以て

$$\frac{\sqrt{(1+b^2-\delta^2)^2+4\delta^2}}{16Q^2} \leq \Gamma \cong \frac{\sqrt{(1+b^2-\delta^2)^2+4\delta^2}}{2Q\sqrt{1+4b^2}} \varepsilon^{-\frac{1}{b} \tan^{-1} b} \quad (5.2.24)$$

更に  $b=1$  と仮定すれば\*

$$\frac{\sqrt{1+\delta^4/4}}{8Q^2} \leq \Gamma \leq 0.408 \times \frac{\sqrt{1+\delta^4/4}}{2Q} \quad (5.2.24)''$$

となり上式を (2.5.9) と比較するに誤差の最大値は大凡  $1/2.5$  程度に減少し (その値に依つて異なるが)、最小値は  $1/2Q$  程度に減少する事が分る。従つて今の場合の近似度は同じ  $Q$  の値に対して、単一同調回路に比して向上する。然し  $\Gamma$  の最大値は 1 回路の場合には明かに  $\tau=0$  であるのに対し今の (3.17) では  $\tau = \tan^{-1} 2 = 1.107$  となつてゐることに注意すべきである。

尚他の形式の 2 回路増幅器に就いても全く同様である。

### [C] 3 回路増幅器

3 回路増幅器の一例として Fig. 5.2.3 図に示す単一同調回路増幅器と結合回路増幅器との組合せ回路に就いて考へるに斯る回路に在つては通常

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0 \\ \text{なお如く設計せられ、且つ簡単の爲に} \\ \frac{1}{Q_i} &= \frac{r_i}{\omega_0 L_i} + \frac{1}{\omega_0 C_i R_i'} \quad R_i' = \frac{R_{i1} R_i}{R_{i1} + R_i} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.25)$$

と置けば

$$Q_1 = Q = 2Q_0 \equiv Q$$

と設計されるのが常である。従つて今の場合の  $A(p)$  は (5.2.2)' 及び (5.2.13) 式に

\*  $b=1$  とは定常振幅の周波数特性が双峰特性から單峰特性に移行せんとする境界で最も良く使用される調整状態である (Fig. 5.4.5 図参照)

(5.2.25)の條件を考慮すれば、次式に依つて表へられることが分る。

$$A(p) = \frac{g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} b p^2}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0)(p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0) \{p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0(1 - \frac{b}{2})\} \{p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(1 - \frac{b}{2})\}} \times \frac{1}{\{p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0(1 + \frac{b}{2})\} \{p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0(1 + \frac{b}{2})\}} \quad (5.2.26)$$

以下前と全く同様にして、上式を部分分數に展開し、 $p$ の代りに  $p + j\omega$  と置いて  $\Pi(p)$  を求めると

$$\Pi(p) = \frac{G_1 A_1}{p + A_1} + \frac{G_2 A_2}{p + A_2} + \frac{G_3 A_3}{p + A_3} = \frac{G A_1 A_2 A_3}{(p + A_1)(p + A_2)(p + A_3)} \quad (5.2.27)$$

$$A_1 = \frac{\omega_0}{2Q} (2 + j\delta)$$

$$A_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \{1 + j(\delta + b)\}, \quad A_3 = \frac{\omega_0}{2Q} \{1 + j(\delta - b)\}$$

$$G_1 = \frac{-j g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} b Q^2}{(1 + b^2)(2 + j\delta)}$$

$$G_2 = \frac{g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} (1 - \frac{b}{2}) Q^2}{2 \{1 + j(\delta + b)\} (1 - j b)} \cong \frac{g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} Q^2}{2 \{1 + j(\delta + b)\} (1 - j b)}$$

$$G_3 = \frac{-g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} (1 + \frac{b}{2}) Q^2}{2 \{1 + j(\delta - b)\} (1 + j b)} \cong \frac{-g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} Q^2}{2 \{1 + j(\delta - b)\} (1 + j b)}$$

$$G = \frac{-j \{4b(1 + b^2) + \delta^2(3 + b^2)\} g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} Q^2}{4(1 + b^2)(2 + j\delta)(1 + b^2 - \delta^2 + 2j\delta)}$$

$$\cong \frac{-j g_0 g_1 \omega_0^2 M_0 \sqrt{L_1 L_2} b Q^2}{(2 + j\delta)(1 + b^2 - \delta^2 + 2j\delta)}$$

一方  $R(p)$  も亦同様にして求め得るが、此の場合  $R(p)$  を  $\Pi(p)$  に対して無視し、 $L(t)$  を以つて包絡インデシタル増幅率とする為の誤差は  $t = \infty$  に対しては  $1/Q$  程度であり、一方その最大値も2回路の夫より通常更に小で、近似度はより向上する故茲には省略する。

#### [D] 多段増幅器

多段増幅器の一例として、同一の回路定數を有する単一同調回路増幅器に就いて吟味する。今の場合の  $A(p)$  は (5.2.2) 式より

$$A(p) = (-g_m \omega_0^2 M)^m \left\{ \frac{p}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0)(p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0)} \right\}^m \quad (5.2.29)$$

$m \backslash s$	1	2	3	4	5
1	1	-	-	-	-
2	1	1	-	-	-
3	0	$\frac{3}{2}$	1	-	-
4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	1	-
5	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	1

第5.2.1表  $Q_{m,s}$  の値

となる。上式右辺の括弧内の内部を部分分分解に展開すれば

$$\left\{ \dots \right\}^m = \sum_{s=1}^m \frac{M_s}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0)^s} + \sum_{s=1}^m \frac{N_s}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0)^s} \quad (5.2.30)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} M_s &= \frac{1}{(m-s)!} \left[ \frac{d^{m-s}}{dp^{m-s}} \frac{p^m}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0)^m} \right]_{p = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0} \cong \frac{1}{2^m (j\omega_0)^{m-s}} Q_{m,s} \\ N_s &= \frac{1}{(m-s)!} \left[ \frac{d^{m-s}}{dp^{m-s}} \frac{p^m}{(p + \frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0)^m} \right]_{p = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0} \cong \frac{1}{2^m (-j\omega_0)^{m-s}} Q_{m,s} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.31)$$

$$Q_{m,s} = \sum_{l=0}^{m-s} \left(-\frac{1}{2}\right)^l {}^l_m C_{s+l} \cdot m+l-1 C_l \quad (5.2.32)$$

尚上記の  $Q_{m,s}$  の数値例を表 5.2.1 表に示す。又て (5.2.30) 式より所要の  $\Pi(p)$  は

$$\Pi(p) = \sum_{s=1}^m \frac{G_s A^s}{(p+A)^s} \quad (5.2.33)$$

$$A = \frac{\omega_0}{2Q} (1+j\delta)$$

$$G_s = \frac{(-g_m \omega_0^2 M)^m M_s}{A^s} = \left( \frac{j g_m \omega_0 M}{2} \right)^m \left( \frac{j 2Q}{1+j\delta} \right)^s Q_{m,s} \quad (5.2.34)$$

となる。従つて所要の包絡インデリアル増幅率は

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= \sum_{s=1}^m G_s U'_s(t) \\ U'_s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{A^s}{p+A} \right)^s = 1 - \mathcal{E}^{-A't} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(A'\tau)^k}{k!} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.35)$$

但し  $A' = (1+j\delta)$  ,  $\tau = \frac{\omega_0}{2Q} t$

$$(5.2.36)$$

にて表へられる。

一方  $R(p)$  は

$$R(p) = \sum_{s=1}^m \frac{G'_s B^s}{(p+B)^s} \quad (5.2.37)$$

$$B = \frac{\omega_0}{2Q} + j 2\omega_0$$

$$G'_s = \frac{(-g_m \omega_0^2 M)^m N_s}{B^s} \cong \left( \frac{-j g_m \omega_0 M}{2} \right)^m \frac{Q_{m,s}}{(-2)^s} \quad (5.2.38)$$

従つて今

$$\left. \begin{aligned} U'_s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \frac{B^s}{(p+B)^s} = 1 - \mathcal{E}^{-B'\tau} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(B'\tau)^k}{k!} \\ B' &= (1+j4Q) \quad \tau = \frac{\omega_0}{2Q} t \end{aligned} \right\} \quad (5.2.39)$$



と置けば、次のように求むことが出来る。

$$u(t) = \sum_{s=1}^m G'_s u'_s(t) \quad (5.2.40)$$

次に  $u(t)$  に就いて一言して置かう。今

$$\theta = \left| \sum_{s=1}^{m-1} G_s u'_s(t) \right| / |G_m u'_m(\infty)| \quad (5.2.41)$$

なる値を考へるに (5.2.34) 式より

$$\theta = \left| \sum_{s=1}^{m-1} \left( \frac{1+j\delta}{j2Q} \right)^{m-s} Q_{m,s} u'_s(t) \right| \quad (5.2.41)'$$

然るに種々の  $s$  に対する  $|Q_{m,s}|$  の最大値は  $m$  が余り大なる限り

$$|Q_{m,s}|_{\max} = Q_{m,m-1} = \frac{m}{2} \quad (5.2.42)$$

である。一方  $|u'_s(t)|$  なる値は数値計算の結果よりすれば  $|u'_s(t)|_{\max}$  は 1 或は夫れと同程度の値である。極端な場合として  $t=0$  及  $\infty$  に在つては (5.2.35) 式より

$$|u'_s(0)| = 0, \quad |u'_s(\infty)| = 1$$

従つて  $Q$  が充分大なる今の回路に在つては

$$0 \leq \theta \leq \frac{m\sqrt{1+\delta^2}}{4Q} |u'_{m-1}(t)|_{\max} \quad (5.2.43)$$

$\theta$  の最大値は  $m$  及び  $\delta$  の値に依つて異なるが  $Q$  が充分大なる今の回路に在つては  $\theta$  は数%程度以下となる ~~ため~~ 故  $\sum_{s=1}^m G_s u'_s(t)$  は  $G_m u'_m(t)$  に対して無視するも実用上差支へなく

$$u(t) \cong G_m u'_m(t)$$

$$\text{従つて } \Pi(p) = \left\{ \frac{-g_m \omega_0 M Q}{1+j\delta} \frac{A}{p+A} \right\}^m \quad (5.2.44)$$

と見做して良い。然るに上記の  $\Pi(p)$  は単段増幅器の  $\Pi(p)$  を機械的に  $m$  乗した値に外ならない。

一方其の  $u(t)$  に対して  $u(t)$  を無視することの誤差を考へるに、今の場合には (5.2.44) (5.2.34) (5.2.38) 乃至 (5.2.40) より

$$\Gamma = \frac{|u(t)|}{|u(\infty)|} = \left| \frac{(1+j\delta)^m \left\{ \sum_{s=1}^m G'_s u'_s(t) \right\}}{(g_m \omega_0 M Q)^m} \right| \quad (5.2.45)$$

\* 厳密には  $m \leq 7$  に対して (5.2.42) の關係が成立し  $8 \leq m \leq 16$  に対しては

$$|Q_{m,s}|_{\max} = Q_{m,m-2} = \frac{m^2-3m}{8}$$

となる。

+ 後述の 5.3 参照 又森脇氏が「単一同調回路多單段増幅器の過渡現象として計算せる値は今の  $u_s(t)$  に外ならず」同氏の數値計算を見れば「一層判然」とあるであらう。

$m$	2	3	4	5	6
$y$	0.368	0.271	0.225	0.195	0.175

第5.2.2表  $y = \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{m-1}{\varepsilon} \right)^{m-1}$  の値

となる。以下  $|v(t)|$  なる値を考へるに  $\tau^2 \gg m/16Q^2$  と仮定すれば (5.2.39) 式より

$$\begin{aligned} v(t) &\cong 1 - \varepsilon^{-\beta'\tau} \frac{(\beta'\tau)^{\Delta-1}}{(\Delta-1)!} \\ &\cong \begin{cases} 1 - \varepsilon^{-\beta'\tau} & (\Delta=1) \\ -\frac{(\beta'\tau)^{\Delta-1}}{(\Delta-1)!} \varepsilon^{-\beta'\tau} = -\frac{(4Q\tau)^{\Delta-1}}{(\Delta-1)!} \varepsilon^{-\beta'\tau} & (\Delta \geq 2) \end{cases} \quad (5.2.46) \end{aligned}$$

従つて  $Q$  が充分大なる今の回路の場合には

$$|v(t)| = \left| \sum_{\Delta=1}^m G'_\Delta v_\Delta(t) \right| \cong |G'_m u_m(t)| = \frac{(g_m \omega_0 M Q \tau)^m}{4Q\tau(m-1)!} \varepsilon^{-\tau} \quad (5.2.47)$$

従つて

$$\Gamma = \frac{(\sqrt{1+\delta^2})^m \tau^{m-1}}{4Q(m-1)!} \varepsilon^{-\tau} \quad (5.2.48)$$

従つて  $\Gamma$  の最大値は  $\tau = m-1$  の時で、その値は

$$\begin{aligned} \Gamma_{\max} &= \frac{(\sqrt{1+\delta^2})^m}{4Q} y \\ y &= \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{m-1}{\varepsilon} \right)^{m-1} \end{aligned} \quad (5.2.49)$$

然るに  $y$  の値は表 5.2.2 に示す如く  $m$  の如何に拘らず 1 より可なり小さい値である。従つて  $Q$  が充分大なる限り  $\Gamma_{\max}$  は  $1/Q$  程度の値で  $v(t)$  も亦  $u(t)$  に対して無視して実用上差支へないことを知る。序に  $\Gamma_{\tau=\infty}$  の値を求むるに  $u_\Delta(\infty) = 1$  なるを以て

$$\Gamma_{\tau=\infty} = \left| \frac{\sum_{\Delta=1}^m G'_\Delta}{G_m} \right| \cong \left( \frac{\sqrt{1+\delta^2}}{2Q} \right)^m \left| \sum_{\Delta=1}^m \frac{Q_{m,\Delta}}{(-2)^\Delta} \right| = O\left(\frac{1}{Q^m}\right)$$

で極めて小さな値である。

以上は単一同調回路増幅率に就いて論じたものであるが他の回路形式の多段増幅率に就いても全く同本義で、その包絡各インテリヤル増幅率の  $\Gamma$  函数は単段増幅率の夫を  $m$  集 ( $m$  は段数) したものに近似的に等しい。

最後に新脇氏の研究<sup>(17)</sup>に就いて一言して置かう。即ち同氏は単段増幅率の定常振幅特性を求め、之に適當な省略を施し、然る後  $j\omega$  を演算子  $p$  にて置換し、之を機械的的に  $m$  集したものを演算子法を利用して解析したものである。その演算子形は結果的には丁度 (5.2.4), (5.2.14) 及び (5.2.25) の  $\Gamma(p)$  を  $m$  集したものに形式的に等しい。然し同氏の研究に於てはその理論的根拠は薄弱で且つ誤差

の程度も明かでないが、本節の所論の如く筆者の提案せる包絡演算子法に従へば之等の欠実は容易に解決することが出来る。

### 5.3 1回路増幅器の解析

各段同一の回路定数も有する $m$ 段1回路高周波増幅器の包絡インデニヤル増幅率の $p$ 函数 $\Pi(p)$ は一般に次の形式を以て表現することが出来る。

$$\left. \begin{aligned} \Pi(p) &= \left( \frac{GA'}{p+A'} \right)^m \\ A' &= \frac{\omega_0}{2Q} (1+j\delta) \quad , \quad \delta = 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1)$$

但し $G$ は定常振幅特性に於て、 $Q$ は同調回路の実効共振尖鋭度、 $\omega_0$ は通過帯域の中央角周波数で、 $\omega$ は入力の極送波の角周波にして、 $\delta$ は離調周度である。次に

$$\frac{2Q}{\omega_0} p = g \quad (5.3.2)$$

なる関係に依り演算子 $p$ を $g$ に変換すれば(5.3.1)は

$$\left. \begin{aligned} \Pi(g) &= \left( \frac{GA}{g+A} \right)^m \\ A &= 1+j\delta \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1)'$$

従つて

$$u(t) = \mathcal{S}_2 \Pi(g) = G^m \left[ 1 + \frac{(-A)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \frac{e^{-At}}{A} \right] \quad (5.3.3)$$

$$= (-1)^{m-1} \frac{(GA)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ \frac{1}{A} (1 - e^{-At}) \right\} \quad (5.3.3)'$$

が所要の包絡インデニヤル増幅率である\*。

若し入力がい任意の複変調波 $e(t) e^{j\omega t}$ なる場合には、これに対応する出力の包絡線 $w(t)$ は(2.3.6)式に依り次式に依り算定せられる。

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) u(\tau) d\tau \\ &= (-1)^{m-1} \frac{(GA)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left[ \frac{1}{A} \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) (1 - e^{-A\tau}) d\tau \right] \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

\* (5.3.2)の関係に依り演算子 $p$ が $g$ に変換されてゐる為、相似定理に依り $u(t)$ の時間変数 $t$ は、本来の時間 $t'$ に対して $t = \frac{\omega_0}{2Q} t'$ の関係にあり5.2の $\tau$ に相当する。以下 $t'$ を本来の時間変数、 $t$ を $g$ 函数に対応する時間変数とする。

然るに基本高周波本力を  $g(A)$  とすれば (3.3.6) 式に依り

$$W(t) = (-1)^{m-1} \frac{(GA)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left[ \frac{1}{A} g(A) \right] \quad (5.3.5)$$

或は基本低周波本力を  $f(A)$  とすれば,  $f(A)$  と  $g(A)$  との間には (3.3.15) の関係があるを以て

$$W(t) = G^m \left[ e(t) + (-1)^m \frac{A^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \frac{f(A)}{A} \right] \quad (5.3.6)$$

とも表し得る。

若し入力が周期的な被変調波なる場合には上記の  $g(A)$  は (3.5.7) 或は (3.5.9) 式に依つて算定せしめる値を代入すべきで,  $S_n(\tau)$  及び  $S(\tau)$  としては, 入力搬送波の性質に依り夫々 (3.5.8) 及び (3.5.10) 或は (3.5.11) の値を採用すべきであることは言ふまでもない。尚此の場合 (3.5.7) 或は (3.5.9) 式の関係を利用するか或は (5.3.6) 式を利用すれば (5.3.5) 表より直ちに解を得る。

次に周期的被変調波入力に対する本力の包絡線波形を決定する周期的包絡インデシャル増幅率に就いて一言して置かう。先づ入力被変調波が 2.5.1 図に示す如く搬送波が連続なる時は, 所要の  $S_n(\tau)$  及び  $S(\tau)$  は夫々 (2.5.3) 及び (2.5.5) に (5.3.3) の値を代入し, 且つ 1.3 の注意 1 に依り常數項を省略すれば

$$\left. \begin{aligned} S_n(\tau) &= G^m \left[ H(\tau) + \frac{(-A)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ \frac{1}{A} \varphi_n(A\tau) \right\} \right] \\ S(\tau) &= G^m \left[ H(\tau) + \frac{(-A)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ \frac{1}{A} \varphi(A\tau) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.3.7)$$

茲に  $\varphi_n(A\tau)$  及び  $\varphi(A\tau)$  は低周波回路に対する (4.3.2) 式の夫と形式的には全く同一で画記すれば

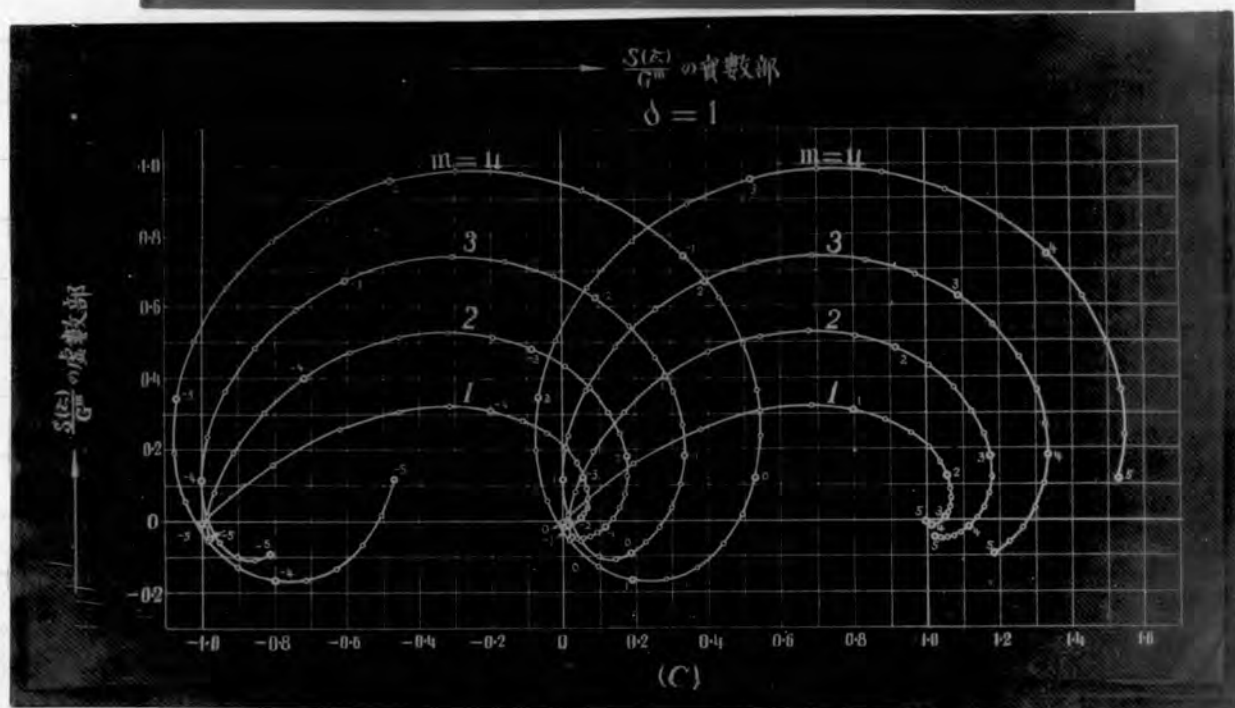
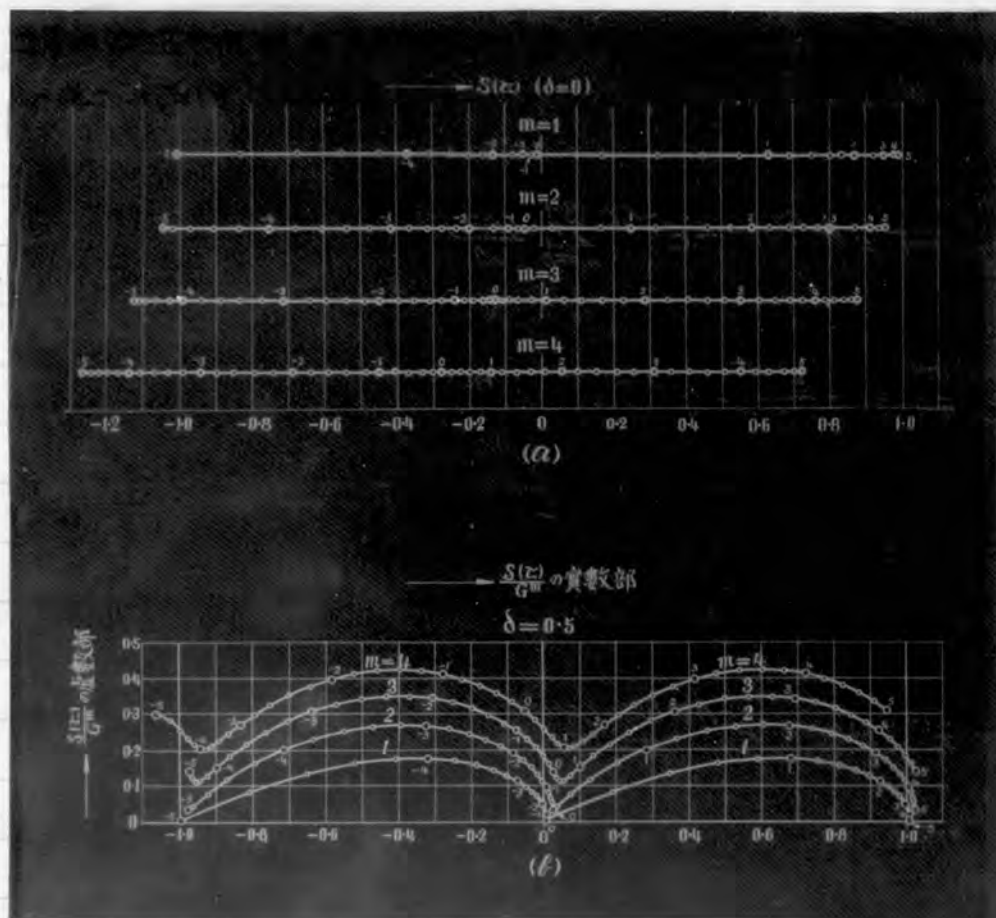
$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(A\tau) &= \varepsilon^{-A\tau} H(\tau) + \frac{\varepsilon^{-At_0} (1 - \varepsilon^{-(n-1)At_0})}{1 - \varepsilon^{-At_0}} \varepsilon^{-A\tau} \\ \varphi(A\tau) &= \varepsilon^{-A\tau} H(\tau) + \frac{\varepsilon^{-At_0}}{1 - \varepsilon^{-At_0}} \varepsilon^{-A\tau} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)$$

一方入力の搬送波が連続ではなく, 2.5.3 図に示す如きものである場合には, (2.5.9) 及び (2.5.12) 式に (5.3.3) 式を代入すれば  $S_n(\tau)$  及び  $S(\tau)$  は (5.3.7) 式にて表はれるが  $\varphi_n(A\tau)$  及び  $\varphi(A\tau)$  は今の場合には

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(A\tau) &= \varepsilon^{-A\tau} H(\tau) + \frac{\varepsilon^{-Bt_0} (1 - \varepsilon^{-(n-1)Bt_0})}{1 - \varepsilon^{-Bt_0}} \varepsilon^{-A\tau} \\ \varphi(A\tau) &= \varepsilon^{-A\tau} H(\tau) + \frac{\varepsilon^{-Bt_0}}{1 - \varepsilon^{-Bt_0}} \varepsilon^{-A\tau} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.9)$$

但し  $B = A + j \frac{2Q\omega}{\omega_0} = 1 + j(2Q + \delta)$





はる値を採用可きである。

以下実際問題として最終興味もあり且つ重要である定常状態即ち  $S(\tau)$  について論じよう。先づ入力の搬送波が連続なる場合即ち  $\varphi(A\tau)$  が (5.3.8) 式にて與へられる場合を考へるに

$$\frac{(-A)^m d^{m-1}}{(m-1)! dA^{m-1}} \frac{1}{A} E^{-A\tau} = -E^{-A\tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(A\tau)^\delta}{\delta!} \quad (5.3.10)$$

にて、一方

$$\begin{aligned} \frac{(-A)^m d^{m-1}}{(m-1)! dA^{m-1}} \frac{1}{A} \frac{E^{-At_0}}{(1-E^{-At_0})} E^{-A\tau} &= -E^{-A\tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(A\tau)^\delta}{\delta!} \left\{ \sum_{\ell=0}^{m-\delta-1} (At_0)^\ell B_\ell(At_0) \right\} \\ &= -E^{-A\tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \Xi_{m-\delta-1}(At_0) \frac{(A\tau)^\delta}{\delta!} \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

但し  $B_\ell(At_0)$  は (4.3.5) 式の夫で

$$\Xi_\ell(At_0) = \sum_{\ell=0}^{\ell} (At_0)^\ell B_\ell(At_0) \quad (5.3.12)$$

従つて

$$S(\tau) = G^m \left[ H(\tau) - E^{-A\tau} \sum_{\delta=0}^{m-1} \frac{(A\tau)^\delta}{\delta!} \left\{ H(\tau) + \Xi_{m-\delta-1}(At_0) \right\} \right] \quad (5.3.13)$$

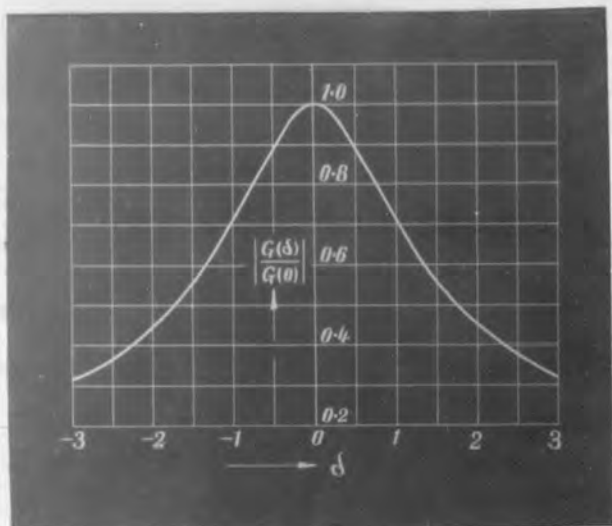
となる。上式中右辺の  $\Xi_{m-\delta-1}(At_0)$  なる項が信号が周期的なる爲の影響を決定する項で、附録 3 にその代表的數値例を示す。

一方入力の搬送波が連続ならざる場合即ち  $\varphi(A\tau)$  が (5.3.9) 式にて與へられる時は (5.3.13) 式に於て  $\Xi_\ell(At_0)$  として (5.3.12) 式の代りに

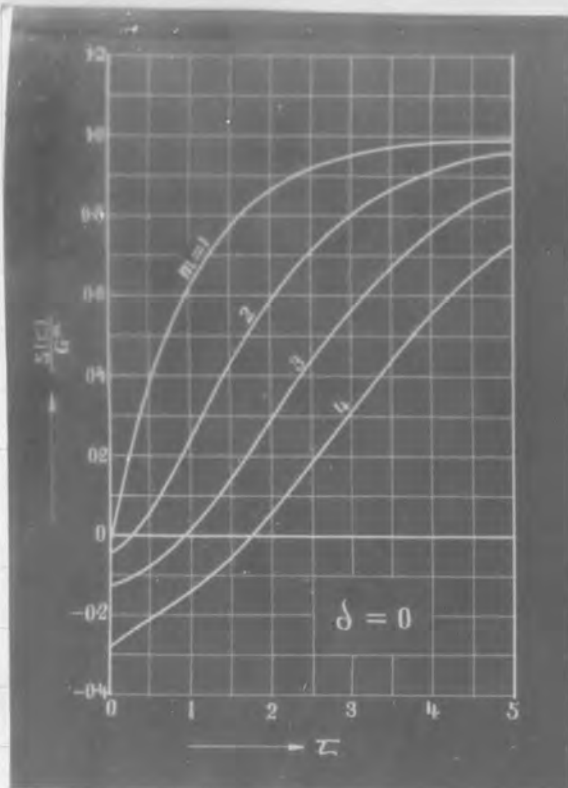
$$\Xi_\ell(At_0) = \sum_{\ell=0}^{\ell} (At_0)^\ell B_\ell(Bt_0) \quad (5.3.14)$$

と考へれば良い。

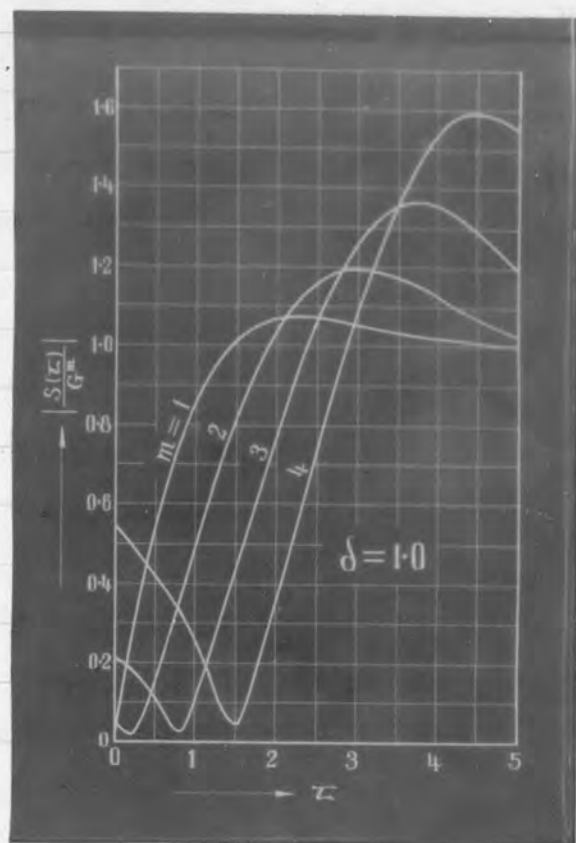
扱へ實際には入力の搬送波は連続的なる場合が多いので、以下  $\Xi_\ell(At_0)$  が (5.3.12) 式にて與へられる場合に就いて (5.3.13) 式の二三の數値例を示せば、  
 ① ⑤.3.1 図及び ⑤.3.2 図の如くである。之等はどれも  $t_0=5$  の場合に就いて行つたもので、  
 ⑤.3.1 図は  $S(\tau)/G^m$  を虚數部を縦軸に實數部を横軸に取り、段數  $m$  をパラメーターとして表したものである。然して (a) は入力の搬送波の周波數が中央周波數に一致せる場合 ( $\delta=0$ ) で、(b) 及び (c) は中央周波數よりずれた場合である。尙  $\delta=0$  の場合には  $A=1$  なるを以て  $S(\tau)/G^m$  なる値は實部のみよりなることに注意を要する。  
 一方 ④中 各曲線上の小円は  $\tau$  の目盛を與へるものである。⑤.3.2 図は  $S(\tau)/G^m$  の絶対値を、 $\tau$  を横軸に取つて示したもので、<sup>周期的</sup> 包絡線インデシヤル増幅率の波形に外ならない。尙参考までに今の場合の振幅の周波數特性を⑤.3.3 図の如



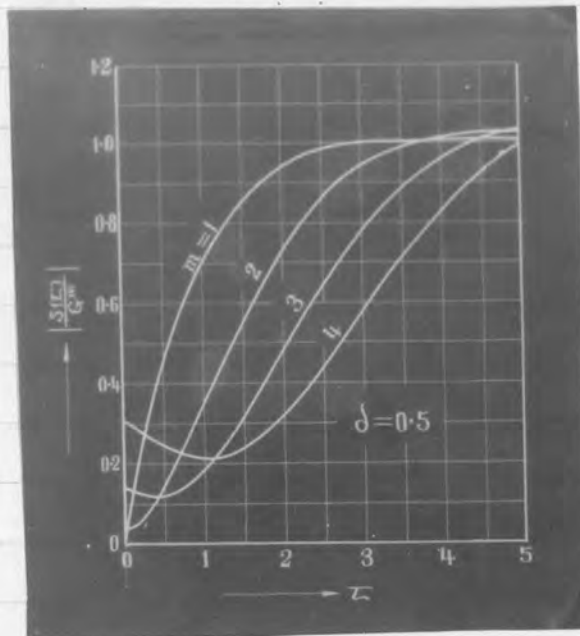
第 5.3.3 圖



(a)

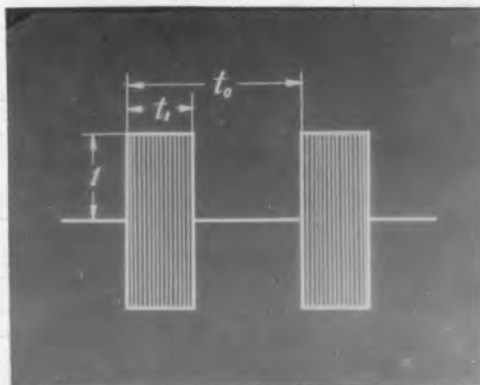


(c)



(b)

第 5.3.2 圖



第 5.3.4 圖

くてある。

次ぎに以上の諸図を参照して \$S(\tau)\$ の一連の性質を簡単に説明しよう。(5.3.7)及び(5.3.8)式より \$t\_0 \geq \tau > 0\$ に対しては

$$\frac{S(\tau)}{G^m} = \left[ 1 + \frac{(-A)^m d^{m-1}}{(m-1)! dA^{m-1}} \frac{e^{-A\tau}}{A(1-e^{-At_0})} \right]$$

一方 \$-\tau \leq \tau < 0\$ に対しては

$$\frac{S(\tau)}{G^m} = \frac{(-A)^m d^{m-1}}{(m-1)! dA^{m-1}} \frac{e^{-A(t_0+\tau)}}{A(1-e^{-At_0})} = \frac{S(t_0+\tau)}{G^m} - 1 \quad (5.3.15)$$

即ち \$S(\tau)/G^m\$ の虚数部の \$\tau=0 \sim -t\_0\$ に対する値は \$\tau=t\_0 \sim 0\$ に対する各対応点の値と全く同じで、実数部の \$\tau=0 \sim -t\_0\$ に対する値は \$\tau=t\_0 \sim 0\$ に対する各対応点の値より 1 だけ小さい。第 5.3.1 図は此の関係を明かに物語っている。従つて \$S(\tau)\$ の数値計算は \$\tau=0 \sim t\_0\$ なる区間に就てのみ施行すれば、之れより直ちに \$\tau=0 \sim -t\_0\$ に対する値を知る事が出来る。次に \$t\_0\$ が充分大にして \$| \operatorname{Re}(At\_0) | \ll 1\$ と見做し得る場合には \$\tau > 0\$ に対して (5.3.13) 式より

$$S(\tau) \cong G^m \left[ 1 - e^{-A\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(A\tau)^j}{j!} \right] = u(\tau) \quad (5.3.16)$$

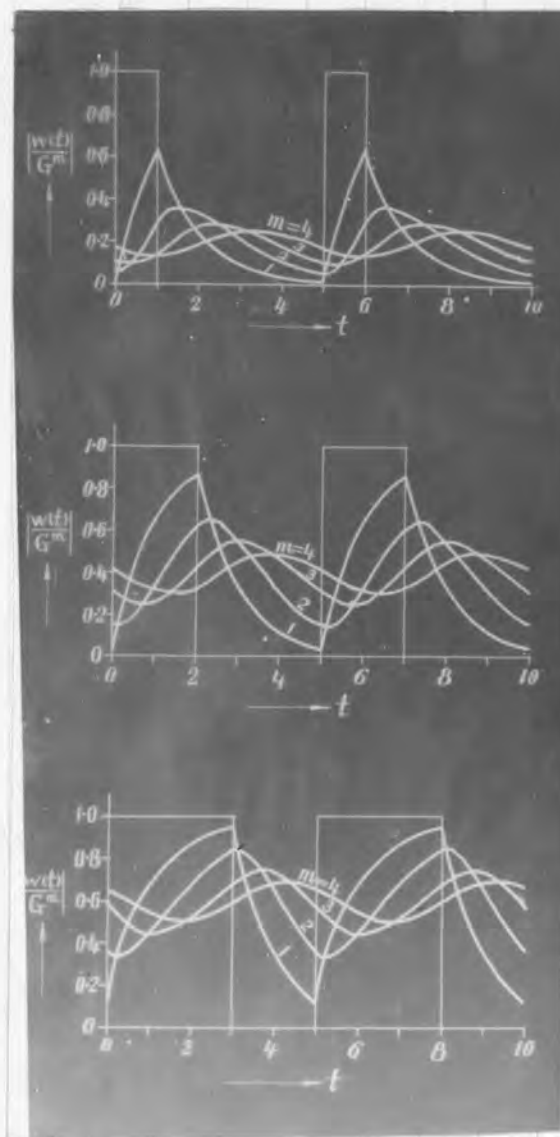
を得る。上式は \$e^{jA\tau} H(\tau)\$ なる入力に対する出力の包絡線を表はるもので、所謂過渡現象と称せられるものに外ならない。尚上式は 森脇氏<sup>(17)</sup>が得られた式に一致してゐる。

扱て \$t\_0=5\$ なる場合には附録 3 より明かな如く、\$\delta=0\$ の場合には \$n \leq 2\$ に対して \$| \operatorname{Re}(At\_0) | \ll 1\$ なるを以て第 5.3.2 図の \$m=1\$ 及び \$m=2\$ なる曲線は近似的には \$u(\tau)\$ を示すものと見做すことが出来る。之れを上述の 森脇氏の得られた曲線と比較すれば \$S(\tau)\_{t\_0=\infty} = u(\tau)\$ を導くことは一層明らかとならう。従つて今の同様の過渡現象として、次の結論を得る。即ち同調せる場合の包絡線は漸近的に 1 に接近するのに対して、離調時には定常値 1 の上下に振動しながら 1 に落着く。然し \$n\$ が 0.5 位迄なら、その振動性は殆んど問題にするに足らぬ程度である。然して離調時に於ける振動性は段数 \$n\$ の増加に伴つて強くなる。

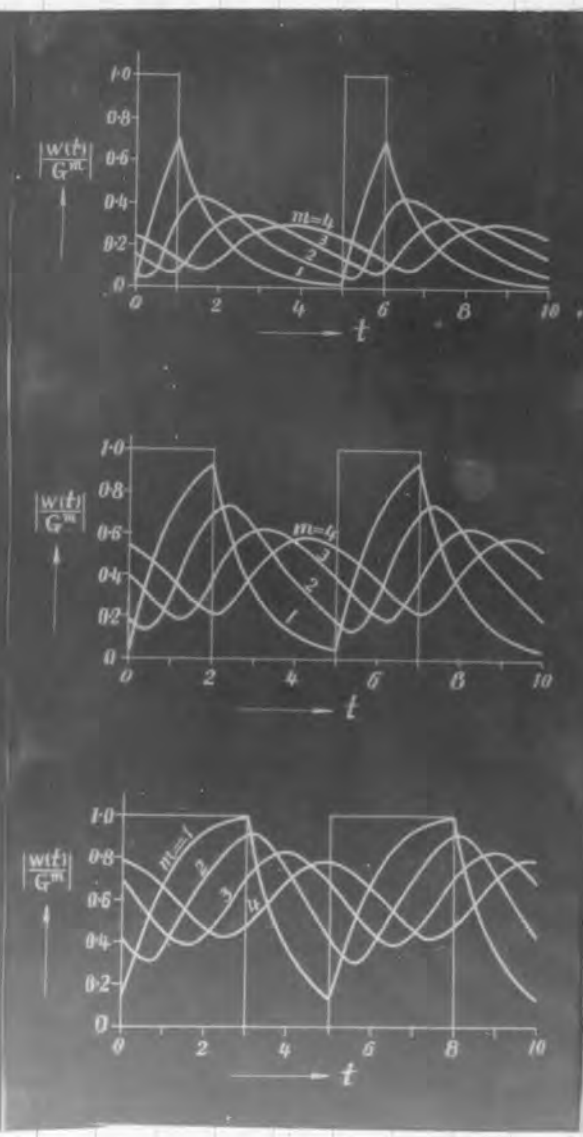
次ぎに以上の \$S(\tau)\$ の一応用例として、第 5.3.4 図に示すかゝり周期的矩形波変調波入力に対する包絡線波形を求めよう。第 2.5.1 図に示すかゝり一般周期的衝撃入力に対する定常出力の包絡線は (2.5.4) 式に依り

$$w(t) = \frac{g}{d\tau} \int_{t-t_1}^t h(t-\tau) S(\tau) d\tau$$

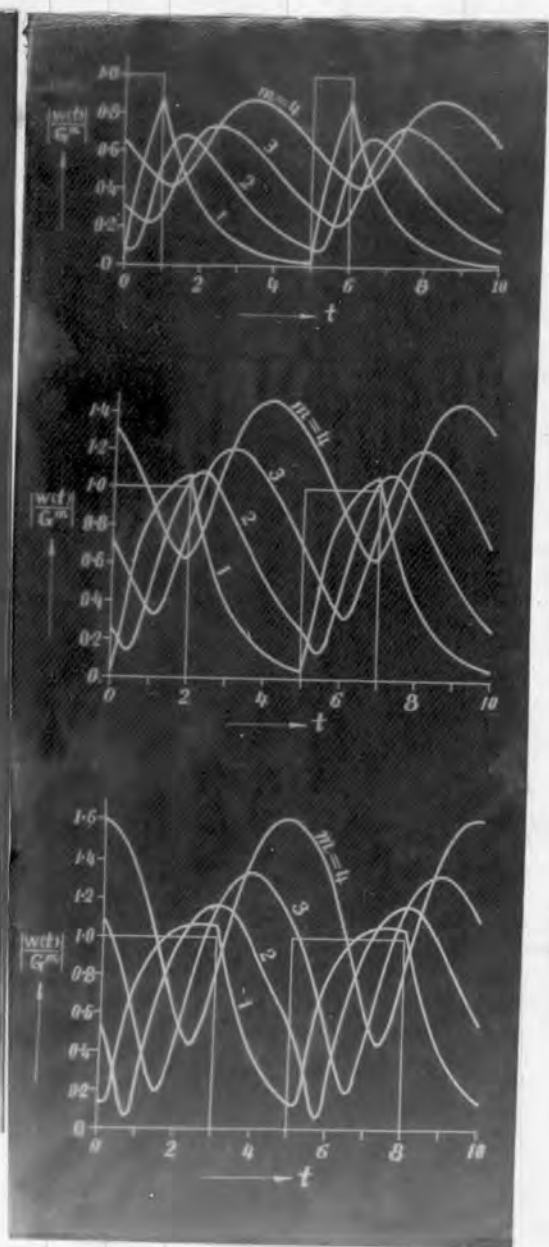




(a)  
 $\delta=0$

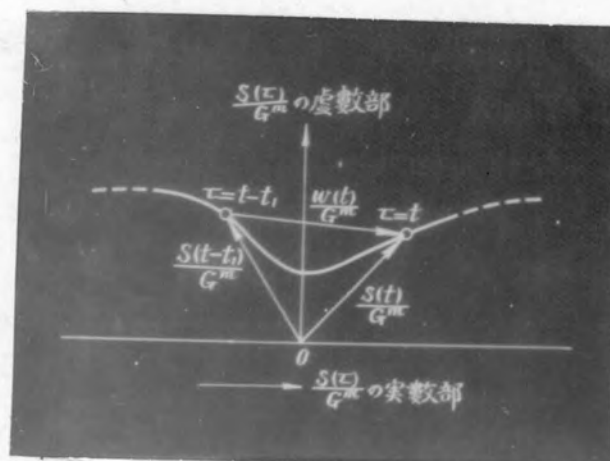


(b)  
 $\delta=0.5$



(c)  
 $\delta=1.0$





第 5.3.5 図

にて求められる。但し  $h$  は衝撃波の幅、 $h(t)$  は衝撃高周波入力の  $0 < t < h$  に対する包絡波形を意味する事は既述通りである。然るに  $\omega = 5.3.4$  図に示す  $h$  が  $\delta$  矩形波に対しては  $h(t) = 1$  なるを以て

$$W(t) = S(t) - S(t-h)$$

(5.3.17)

が所要の包絡出力を與へる。然し  $S(t)$  は  $\delta \neq 0$  の時は複素数なるを以て  $W(t)$  も複素数となり  $|W(t)|$  が実際の出力の包絡線を與へるが之の値は  $\omega = 5.3.5$  図に示す  $h$  が  $\omega = 5.3.1$  図の曲線より  $h$  なる時間差を有する二実数の距離  $|W(t)|/|G^m|$  の値を與へる。 $\omega = 5.3.6$  図は  $\omega = 5.3.1$  図より其ノ梯にて取めた周期的矩形波或調波に対する包絡出力を示す。之等の圖より次の事が分る。尚以下簡単の爲に  $|W(t)/G^m|$  を伎りに正規包絡出力と呼称することとする。

- (1)  $m=1$  の場合には信号休止期間には常に指數函数的に減小するが信号の加へられてゐる期間の包絡線は離調度が大きくなるに依りて前方に膨れ出す(衝撃波の幅が)  $h=3$  の場合に就いて比較すれば"明かだ"ある。
- (2)  $m=1$  の場合の包絡線には一次微係数  $\delta$  の不連続な鋭角部が存在するか二段以上で  $\delta$  は此の鋭角部はなくなり滑らかな曲線となる。
- (3) 衝撃波の幅が余り大でない場合には正規包絡線の最大値は段數の増加に伴ひ

(イ) 同調時及び離調度が甚しく大ではない場合には漸次減小するに反し ( $\delta=0$  及び  $\delta=0.5$  の場合)

(ロ) 離調度が大きくなると場合に依りては反対に増大する。(  $\delta=1.0$  の場合参照)

- (4) 同調時及び離調度の小なる時の包絡出力は段數の増加と共に急速に平坦化され相隣る二つの信号の判別が不明瞭となるのに対し、 $\delta=1$  即ち遮断周波數(増幅度が同調時のそれの  $\sqrt{2}$  になる周波數)附近の信号波に対しては正規包絡出力の切れぬみは大で相隣る二つの信号波を判然と區別出来、見掛け上帯域幅を拡大せると同様の効果を挙げ得る。之れ即ち所謂單側帶波伝言の利便である。

以上の他 出力波の時間の屋山の模様、段數の増加による波形の崩れの模様等圖を一見すれば"明かだ"茲に改めて指直するに及ばないであらう。

## 5.4 2回路増幅器の解析

各段同一の回路定數を有する  $m$  段2回路高周波増幅器の包絡インテシヤル増幅率の  $\rho$  函数は離調周回路にても又結合回路にても  $\omega = 5.6.1$  表に示す如く、一般に次の形

で表現せられる。

$$\Pi(p) = \left\{ \frac{G A_1' A_2'}{(p+A_1')(p+A_2')} \right\}^m \quad (5.4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1' &= \frac{\omega_0}{2Q} \{1+j(\delta+b)\} \\ A_2' &= \frac{\omega_0}{2Q} \{1+j(\delta-b)\} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.2)$$

但し  $G, Q, \omega_0$  は 1 回路帯域波増幅器と同様で  $G$  は定常増幅率,  $Q$  は同周回路の実効共振尖鋭度,  $\omega_0$  は該増幅器の通過帯域の中央周波数を意味し,

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \quad (\text{離調度}) \\ b &= \begin{cases} Q \frac{\beta_1 - \beta_2}{\omega_0} & (\text{離調回路: } \beta_1, \beta_2 \text{ は各同調回路の固有角周波数}) \\ kQ & (\text{結合回路: } k \text{ は結合係数}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.3)$$

従つて演算子  $p$  を

$$\frac{2Q}{\omega_0} p = g \quad (5.4.4)$$

なる変換式に依つて  $g$  に変換すれば\* (5.4.1) 式は

$$\Pi(g) = \left\{ \frac{G A_1 A_2}{(g+A_1)(g+A_2)} \right\}^m \quad (5.4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1+j(\delta+b) \\ A_2 &= 1+j(\delta-b) \end{aligned} \right\} \quad (5.4.6)$$

となる。従つて今の場合作の包絡線インテュアル増幅率は次式で表へられる。

$$U(t) = G^m \left[ 1 + \frac{(-A_1 A_2)^m}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dA_1^{m-1}} \frac{E^{-A_1 t}}{A_1 (A_2 - A_1)^m} + \frac{d^{m-1}}{dA_2^{m-1}} \frac{E^{-A_2 t}}{A_2 (A_1 - A_2)^m} \right\} \right] \quad (5.4.7)$$

若し入力か  $e(t) E^{j\omega t'} H(t')$  ならば, 出力の包絡線は

$$W(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) U(\tau) d\tau$$

にて算定せられるから, 上式に (5.4.7) 式を代入,  $f(A)$  を基本低周波入力とすれば

$$W(t) = G^m \left[ e(t) + (-1)^m \frac{A_1^m A_2^m}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dA_1^{m-1}} \frac{f(A_1)}{A_1 (A_2 - A_1)^m} + \frac{d^{m-1}}{dA_2^{m-1}} \frac{f(A_2)}{A_2 (A_1 - A_2)^m} \right\} \right] \quad (5.4.8)$$

となる。

\* 149 頁脚註参照

入力が周期的な調幅衝撃波なる場合の出力は、衝撃波の包絡線形を  $f(t)$  とすれば、

$$W(t) = G^m \left[ f(t) - f(t)H(t-t_0) + \frac{(-A_1 A_2)^m}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dA_1^{m-1}} \frac{f(A_1)}{A_1(A_2-A_1)^m} + \frac{d^{m-1}}{dA_2^{m-1}} \frac{f(A_2)}{A_2(A_1-A_2)^{m-1}} \right\} \right] \quad (5.4.10)$$

にて算定せられる。尚  $f(A)$  は過渡出力に対しては (3.5.2) 式を、又定常出力に対しては (3.5.4) 式を採用すれば良い。但し  $S_n(\tau)$  及び  $S(\tau)$  は、入力の搬送波が各周期を通じて連続なる場合には

$$\left. \begin{aligned} S_n(\tau) &= \varepsilon^{-A\tau} H(\tau) + \frac{\varepsilon^{-At_0}(1-\varepsilon^{-(n-1)At_0})}{1-\varepsilon^{-At_0}} \varepsilon^{-A\tau} \\ S(\tau) &= \varepsilon^{-A\tau} H(\tau) + \frac{\varepsilon^{-At_0}}{1-\varepsilon^{-At_0}} \varepsilon^{-A\tau} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.11)$$

を、又搬送波の各周期に於ける位相が周期に無関係に相等しい時は

$$\left. \begin{aligned} S_n(\tau) &= \varepsilon^{-A\tau} H(\tau) + \frac{\varepsilon^{-Bt_0}(1-\varepsilon^{-(n-1)Bt_0})}{1-\varepsilon^{-Bt_0}} \varepsilon^{-A\tau} \\ S(\tau) &= \varepsilon^{-A\tau} H(\tau) + \frac{\varepsilon^{-Bt_0}}{1-\varepsilon^{-Bt_0}} \varepsilon^{-A\tau} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.11)'$$

$$B = \frac{2\omega}{\omega_0} (A' + j\omega)^* = A + j(\delta + 2Q)$$

なる値となおべきである。従って前者に対しては表 3.6.1 表の値がその値利用出来る筈で、後者の場合には表中の  $At_0$  を  $Bt_0$  にて置換すれば充分である。

次に前節に於けると同様、周期的包絡インデシャル増幅率を求めて見よう。先づ入力搬送波が各周期を通じて連続なる場合には、(5.4.7) を (2.5.3) 及び (2.5.5) に代入し、且つ 1.3 の注意 1 を考慮すれば

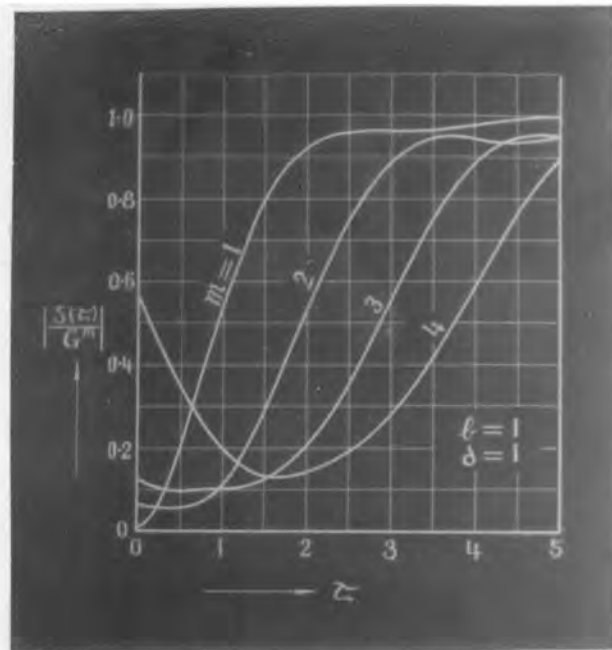
$$S_n(\tau) = G^m \left[ H(\tau) + \frac{(-A_1 A_2)^m}{(m-1)!} \left\{ \sum_{i,j=1,2}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{\varphi_n(A_i\tau)}{A_i(A_j-A_i)^m} \right\} \right] \quad (5.4.12)$$

$$S(\tau) = G^m \left[ H(\tau) + \frac{(-A_1 A_2)^m}{(m-1)!} \left\{ \sum_{i,j=1,2}^{1,2} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{\varphi(A_i\tau)}{A_i(A_j-A_i)^m} \right\} \right] \quad (5.4.13)$$

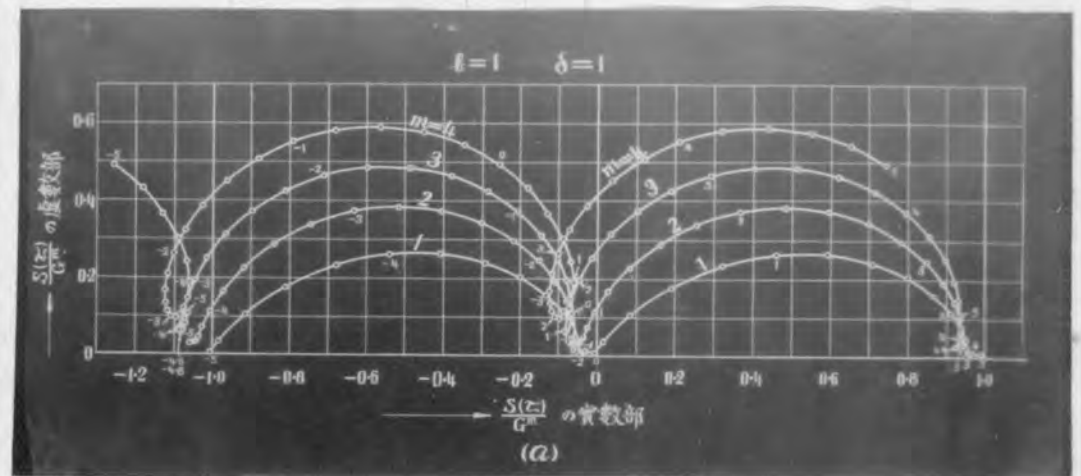
茲に  $\varphi_n(A\tau)$  及び  $\varphi(A\tau)$  は (5.3.8) にて與へられ、 $\sum_{i,j=1,2}^{1,2}$  なる記号は  $i=1, j=2$  及び  $i=2, j=1$  なる 2 つの場合に就て和を取ることを意味する。

以下問題を定常状態に限定し、上記の  $S(\tau)$  を数値計算の便を考慮して変形する時は次の如くなる。即ち

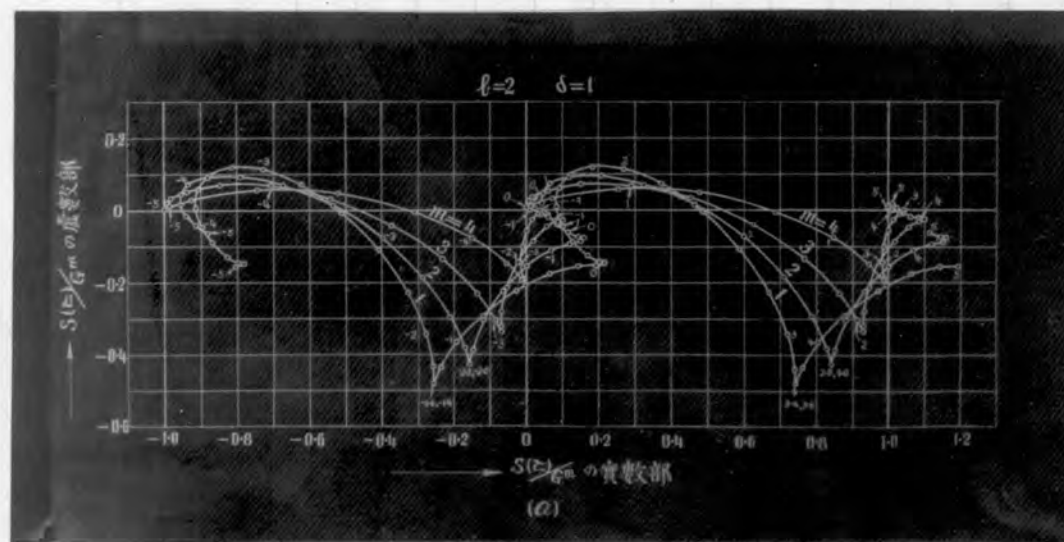
\* 時間座標が  $t'$  より  $t = \frac{\omega_0}{\omega} t'$  へ変換されてゐることに注意。



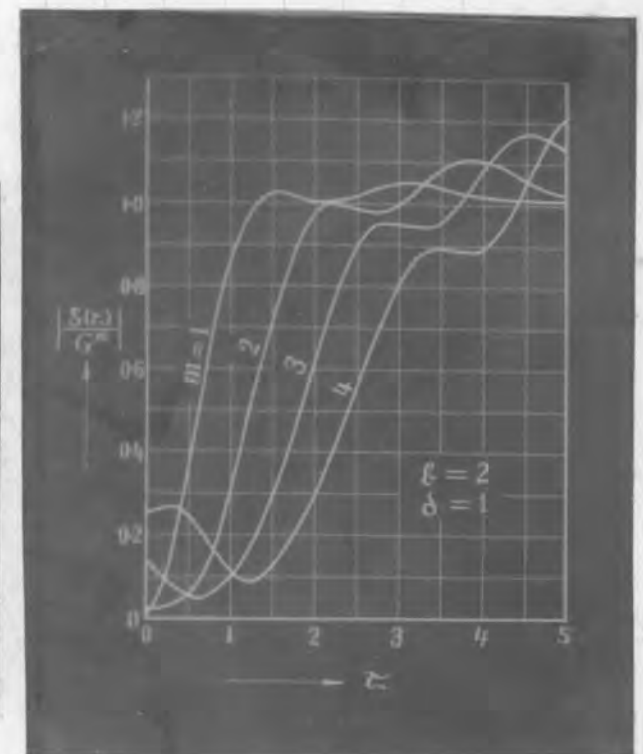
(b)



第 5.4.3 図

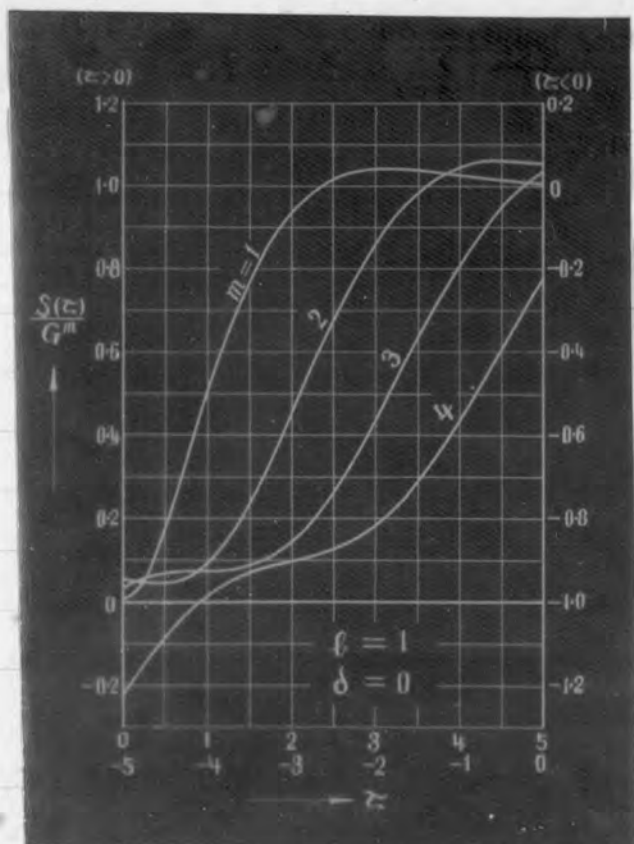


第 5.4.4 図

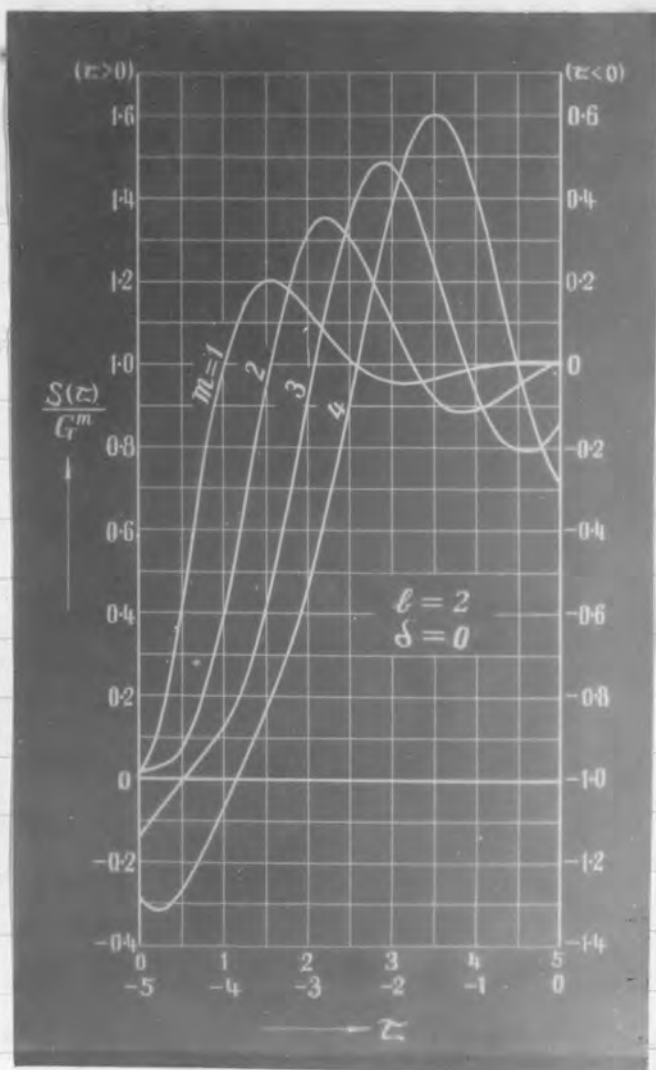


(b)





第 5.4.1 图



第 5.4.2 图

$$\frac{(-A_1 A_2)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{e^{-A_i \tau}}{A_i(A_j - A_i)^m} = \gamma_{ji}^m e^{-A_i \tau} \sum_{\Delta=0}^{m-1} \frac{(A_i \tau)^\Delta}{\Delta!} \left\{ \sum_{R=0}^{m-\Delta-1} m+R-1 C_R \gamma_{ij}^R \right\}$$

$$\frac{(-A_1 A_2)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \left\{ \frac{1}{A_i(A_j - A_i)^m} \frac{e^{-A_i t_0}}{1 - e^{-A_i t_0}} e^{-A_i \tau} \right\}$$

$$= -\gamma_{ji}^m e^{-A_i \tau} \sum_{\Delta=0}^{m-1} \frac{(A_i \tau)^\Delta}{\Delta!} \left\{ \sum_{R=0}^{m-\Delta-1} m+R-1 C_R \gamma_{ij}^R \Phi_{m-\Delta-R-1}(A_i t_0) \right\}$$

但し

$$\gamma_{ij} = \frac{A_i}{A_i - A_j} = 1 - \gamma_{ji} \quad (5.4.14)$$

に1で、 $\Phi_R(A_i t_0)$ なる記号は(5.3/2)にて與へられる1値である。以上の諸式より所求の $S(\tau)$ は

$$S(\tau) = G^m \left[ H(\tau) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} e^{-A_i \tau} \left\{ \sum_{\Delta=0}^{m-1} \frac{(A_i \tau)^\Delta}{\Delta!} P_\Delta(i,j) \right\} \right] \quad (5.4.15)$$

$$P_\Delta(i,j) = \gamma_{ji}^m \sum_{R=0}^{m-\Delta-1} m+R-1 C_R (\gamma_{ij})^R \left\{ H(\tau) - \Phi_{m-R-\Delta-1}(A_i t_0) \right\} \quad (5.4.16)$$

となる。茲に  $P_\Delta(i,j)$ なる値は  $\tau=0$ に無関係な定数である。

尚入力のがね送波の位相が1周期に等しく各周期毎に等しい場合には上式に於て  $\Phi_R(A_i t_0)$ の値として(5.3/14)式を採用するのみにて良し。

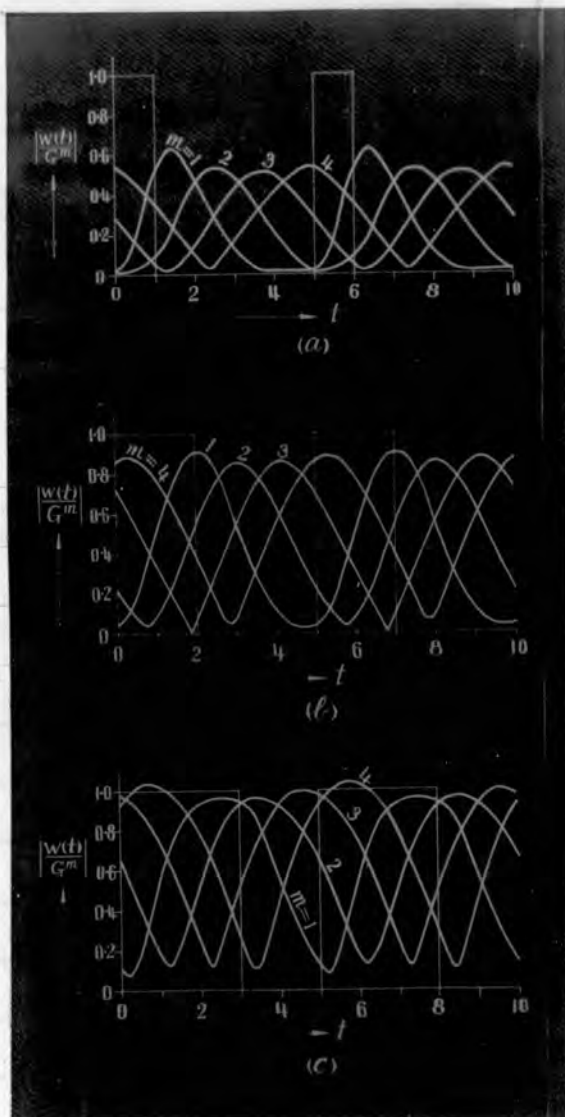
又  $t_0$ が充分大にして  $|\Phi_R(A_i t_0)| \ll 1$ なる場合には  $\tau > 0$ に於て、(5.4/15)式より

$$U(t) = S(\tau) = G^m \left[ 1 + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \gamma_{ji}^m e^{-A_i \tau} \left\{ \sum_{\Delta=1}^{m-1} \frac{(A_i \tau)^\Delta}{\Delta!} \sum_{R=0}^{m-\Delta-1} m+R-1 C_R (\gamma_{ij})^R \right\} \right] \quad (5.4.17)$$

を得る。上式は  $\varepsilon^{j\omega\tau} H(\tau)$ なる入力に包絡おカで森脇氏が過渡現象と稱せられた値で、Gensei 氏<sup>(16)</sup>の論いたのは上式の  $m=1$ の場合に外ならない。

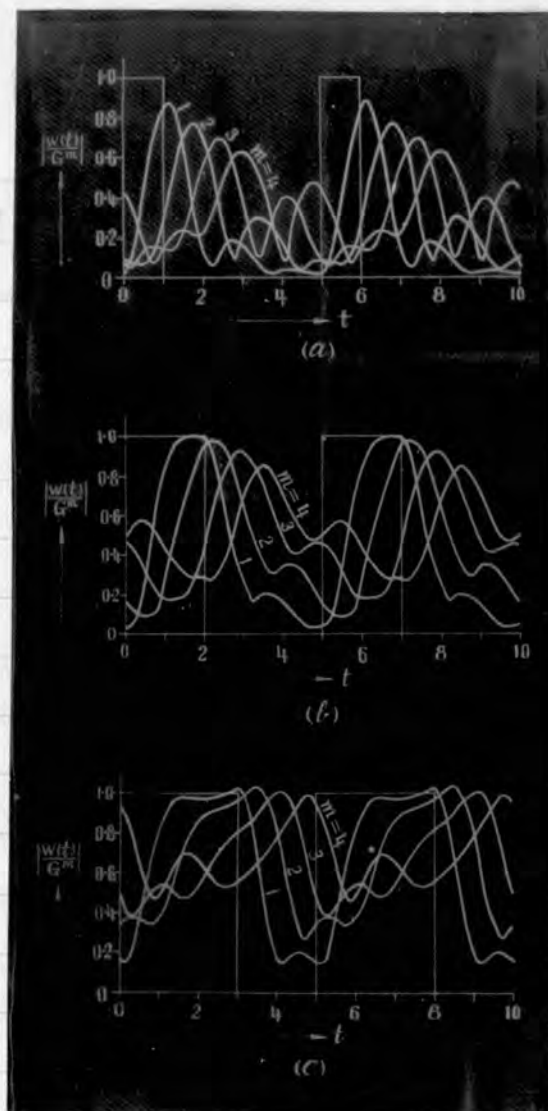
以上の代表的數値計算例として入力のがね送波が連続なる時の  $S(\tau)$ を  $t_0=5$ の場合に就いて図示すれば"カ5.4.1圖乃至カ5.4.4圖を得る。但し回路の通帯域幅を左右する係数  $\beta$ の値を1及び2と選定した。カ5.4.5圖は今の場合の定常振幅特性を圖示するもので、之れより  $\beta=2$ は双峰特性を示し  $\beta=1$ の場合には丁度双峰特性より單峰特性に移行せんとする場合に相準してゐることが分る。(後者が最も良く用ひられる特性である。) 又之等の圖より  $\varepsilon^{j\omega\tau} H(\tau)$ なる入力に対する包絡系換言すれば"包絡インデシヤル増幅率(所謂過渡現象)の大凡その特性として次の3者實を挙げることが出来る。

- (1)  $\beta=0$ 即ち同3周時に於ても振動性を有し、定常値の上下に振動しながら定常値に落着く。然してその振動性は  $\beta$ が大なる程換言すれば"帯域幅が広くなり定常振幅特性が双峰性を顯著に示すにつれて大となる。



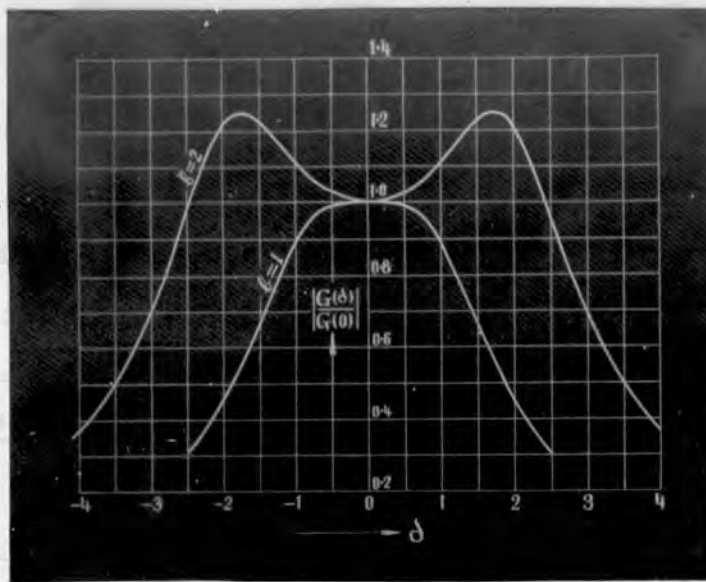
$b=1.0; \delta=1.0$

第 5.4.8 圖

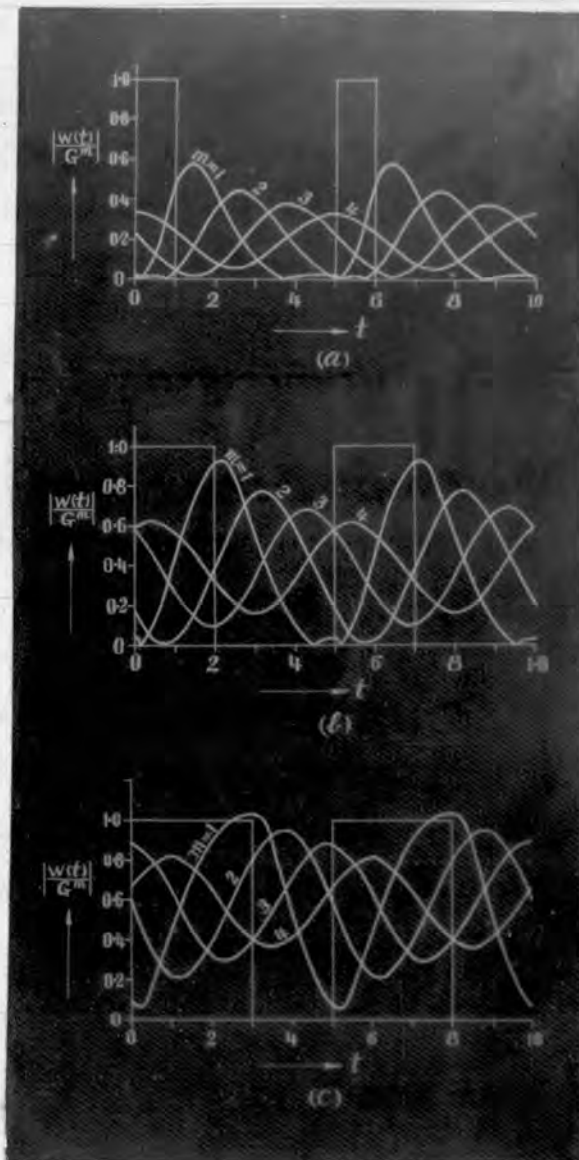


$b=2.0; \delta=1.0$

第 5.4.9 圖

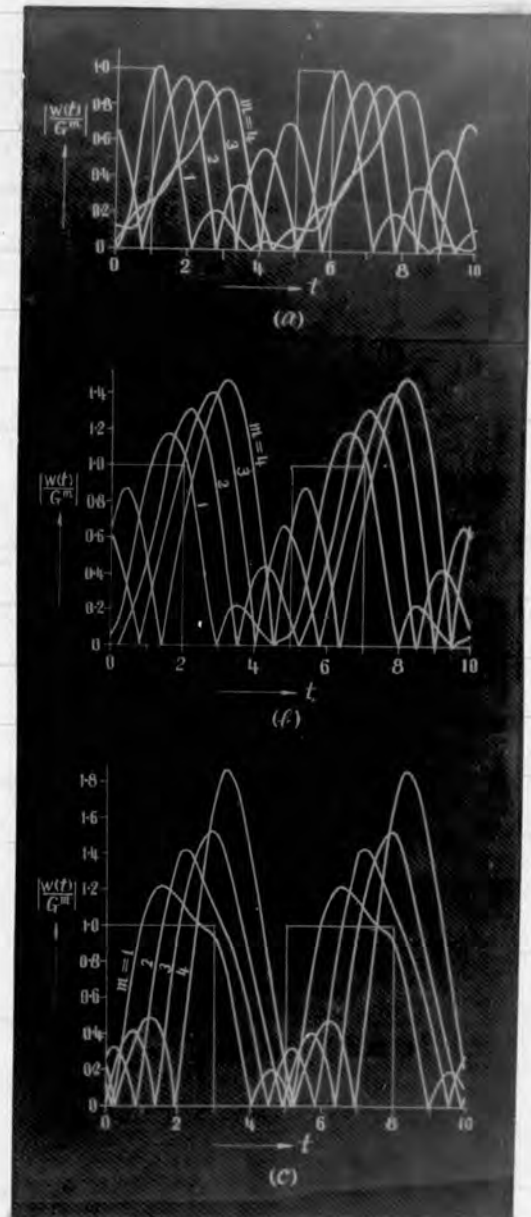


第5.4.5圖



$b=1.0$  ;  $\delta=0$

第5.4.6圖



$b=2.0$  ;  $\delta=0$

第5.4.7圖



(2)  $\delta$  の値が大になるにつれて、換言すれば“帯域調度が大になるにつれて”包絡出力は段階的に定常値に近づく。然し  $\delta$  の値が小なる時は包絡出力は階段的に増加し一旦定常値を越える。

(3) 以上の特性は段数の増加と共に大となる。

一方前節に於けると同様にして今の場合の  $S(\omega)$  も亦 (5.3.15) の関係式を満足する事を容易に証明出来るのであって  $S(\omega)/q_m$  の虚数部は  $\omega$  を周期とする周期函数にて、 $S(\omega)/q_m$  の実数部の  $\omega = 0 \sim \omega_0$  に対する値は  $\omega = \omega_0 \sim 0$  に於ける各対応値の夫より1だけ小さい。亦5.4.1図乃至5.4.4図の(a)図は斯る4生値を明かに示してゐる。従つて今の場合の  $S(\omega)$  も  $\omega = 0 \sim \omega_0$  なる区間に対してのみ数値計算を施行すれば  $\omega = 0 \sim \omega_0$  に対する値を知る事が出来る。

次に亦5.3.4図に示すが如き周期的矩形波入力に対する包絡出力を  $\omega = 5$  の場合に就いて (5.3.17) 式に従ひ、亦5.4.1図乃至5.4.4図より求めた系結果を図示すれば、亦5.4.6図乃至亦5.4.9図を得る。これを亦5.3.6図とヒト較すれば“同様に”か否如く今の場合の出力波形の変化は一層複雑で、その二三の特性を述べて、次の如くである。

(1)  $m=1$  の場合には在つても包絡出力は  $\omega = \omega_0$  に於ける鋭角部がなくなり、滑らかになる。

(2) 正規包絡線の最大値は段数の増大に伴ひ減小する場合もあれば、(亦5.4.6図の場合) 逆に増大する場合もあり、(例へば亦5.4.7図(b)及び(c)) 又殆んど変化せぬ場合もあり、(例へば亦5.4.8図) 入力の條件、回路定数、帯域調度等により本極めて複雑な変化をなす。

(3)  $\beta=2$  (定常振幅特性は双峰特性にて、その通過帯域幅は  $\beta=1$  のときの約2倍) の場合には、相隣る2つの主包絡出力の中間に隆起部が生ずる。然してその大抵は衝撃幅が短い程(同一周期に於て)、又段数が大なる程大きくなり、主出力の振幅と同程度となることがある。(亦5.4.7図(a)参照) 斯る隆起の生ずる理由は信号休止期間中にも回路中には (5.4.1) 及び (5.4.2) 式より明かな如く、

$$-\frac{\omega_0}{2Q}(\delta \pm \beta) + \omega = \begin{cases} \omega_0(1 \pm \frac{\beta}{2}) & \text{結合回路} \\ \beta_1, \beta_2 & \text{帯域調回路} \end{cases}$$

なる周波数の僅かに異なる2つの振動が存在し、之れが“交り生ずる”事に基因する。



(4)  $\delta$  の値が一定ならば,  $\delta=0$  より  $\delta=1$  の場合の方が出力波形は歪が少ない。  
(単側帯波通信の利便)

### 5.5 3回路増幅器の解析

各段同一の回路定数を有する  $m$  段 3 回路高周波増幅器の包絡インデリアル増幅率の  $p$  函数は一般に次の形にて表現せられる。

$$\Pi(p) = \left\{ \frac{G A_1' A_2' A_3'}{(p+A_1')(p+A_2')(p+A_3')} \right\}^m \quad (5.5.1)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} A_1' &= \frac{\omega_0}{2Q} (2+j\delta) \\ A_2' &= \frac{\omega_0}{2Q} \{1+j(\delta+b)\} \\ A_3' &= \frac{\omega_0}{2Q} \{1+j(\delta-b)\} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.2)$$

従って演算子  $p$  を  $2Qp/\omega_0 = g$  なる関係式に依り  $g$  に変換すれば

$$\Pi(g) = \left\{ \frac{G A_1 A_2 A_3}{(p+A_1)(p+A_2)(p+A_3)} \right\}^m \quad (5.5.3)$$

$$A_1 = 2+j\delta, \quad A_2 = 1+j(\delta+b), \quad A_3 = 1+j(\delta-b)$$

従って所要の包絡インデリアル増幅率は

$$U(t) = G^m \left[ 1 + \frac{(-A_1 A_2 A_3)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{e^{-A_i t}}{A_i (A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \right] \quad (5.5.4)$$

但し  $\sum_{i,j,k}^{1,2,3}$  なる記号は  $i=1, j=2, k=3$ ;  $i=2, j=3, k=1$  及び  $i=3, j=1, k=2$  なる 3つの場合について和を取ることを意味するものとする。

又入力か  $e(t) \propto j\omega t$   $H(t)$  なる場合の包絡出力は (2.3.6) 式に (5.5.4) を代入すれば

$$W(t) = G^m \left[ e(t) + \frac{(-A_1 A_2 A_3)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{f(A_i)}{A_i (A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \right] \quad (5.5.5)$$

にて算定せられる。但し  $f(A_i)$  は基本低周波出力を映へることは言さねた。一方又入力か  $R(t)$  を包絡波形とする周期的衝撃高周波なる時は

$$W(t) = G^m \left[ R(t) - R(t) H(t-t_1) + \frac{(-A_1 A_2 A_3)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{f(A_i)}{A_i (A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \right] \quad (5.5.6)$$

但し上式中の  $f(A_i)$  の値は (5.4.10) 式の  $f(A_i)$  と同じ意味を有する。

次に今の場合の周期的包絡インテグラル増幅率  $S_n(\tau)$  及び  $S(\tau)$  について一言して置かう。(5.5.4) 式を (2.5.3) 及び (2.5.5) 式に代入し且つ 1.3 の注意 1 に依り常數項を省略すれば

$$S_n(\tau) = G^m \left[ H(\tau) + \frac{(-A_1 A_2 A_3)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{\varphi_n(A_i \tau)}{A_i (A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \right] \quad (5.5.7)$$

$$S(\tau) = G^m \left[ H(\tau) + \frac{(-A_1 A_2 A_3)^m}{(m-1)!} \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \frac{d^{m-1}}{dA_i^{m-1}} \frac{\varphi(A_i \tau)}{A_i (A_j - A_i)^m (A_k - A_i)^m} \right] \quad (5.5.8)$$

但し  $\varphi_n(A\tau)$  及び  $\varphi(A\tau)$  は入力の性質に応じて (5.3.8) 或は (5.3.9) の何れかを採用すべきである。上記の  $S(\tau)$  の右辺に於ける微分演算を實際に施行すれば

$$S(\tau) = G^m \left[ H(\tau) + \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \varepsilon^{-A_i \tau} \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(A_i \tau)^\alpha}{\alpha!} P_\alpha(i,j,k) \right] \quad (5.5.9)$$

$$P_\alpha(i,j,k) = (\delta_{ji} \delta_{ki})^m \sum_{h=0}^{m-\alpha-1} m+h-1 C_h (\delta_{ij})^h \sum_{g=0}^{m-\alpha-h-1} m+g-1 C_g (\delta_{ik})^g \times \left\{ H(\tau) - \Phi_{m-\alpha-h-g-1}(A_i \tau_0) \right\}$$

となる。但し

$$\delta_{ji} = \frac{A_j}{A_j - A_i} = 1 - \delta_{ij}, \quad \delta_{ki} = \frac{A_k}{A_k - A_i} = 1 - \delta_{ik} \quad (5.5.10)$$

1 にて  $\Phi_g(A\tau_0)$  なる値は入力搬送波の性質に応じて (5.3.12) 或は (5.3.14) 式の値を採用すべきである。然して明かに  $P_\alpha(i,j,k)$  のはてに無関係な常數 1 にて、且つ今の  $S(\tau)$  も亦 (5.3.15) 式の關係を満足する。

尚  $\tau_0$  が充分大に於て  $|\Phi_g(A\tau_0)| \ll 1$  なる時は  $\tau > 0$  に對して

$$U(t) = S(\tau) = G^m \left[ 1 + \sum_{i,j,k}^{1,2,3} \varepsilon^{-A_i \tau} \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(A_i \tau)^\alpha}{\alpha!} P_\alpha(i,j,k) \right] \quad (5.5.11)$$

$$P_\alpha(i,j,k) = (\delta_{ji} \delta_{ki})^m \sum_{h=0}^{m-\alpha-1} m+h-1 C_h (\delta_{ij})^h \sum_{g=0}^{m-\alpha-h-1} m+g-1 C_g (\delta_{ik})^g$$

之れ多少形式は異なるが藤脇氏の述べられた過渡現象の式に外ならない。

## 参考文献

- (1) 第1回電気三学会関西支部聯合講演会にて講演(昭和21年11月)  
林・近藤：一般周期力に依つて誘起する過渡並びに定常現象の一解析法
- (2) 林・近藤：電気評論に投稿中
- (3) C.W. Carnahan: I. R. E. vol. 23 p. 1393 (1935)
- (4) A.I. Verken: Trans. of A. I. E. E. vol. 56 p. 768 (1937)
- (5) 林：電学誌 62巻 505頁 (昭17)
- (6) 林・近藤：電気評論に投稿中
- (7) K.W. Wagner: Operatorenrechnung S. 401 (1940)
- (8) 第3回電気三学会関西支部聯合講演会にて講演(昭和23年10月)  
林・近藤：低周波並びに高周波増幅器の出力の解析的検討
- (9) 第2回電気三学会関西支部聯合講演会にて講演(昭和22年11月)  
林・近藤・小川：各種低周波多段増幅器の過渡特性と周期的信号波増幅特性の解析
- (10) H.M. Lane: I. R. E. vol. 20 p. 722 (1932)
- (11) K.W. Wagner: (7)の S. 135
- (12) A.V. Bedford & G.L. Frenolall: I. R. E. vol. 27 p. 277 (1939)
- (13) Courant u. Hilbert:
- (14) Henney: Radio Engineering Handbook p. 716 (1941)
- (15) 第3回電気三学会関西支部聯合講演会にて講演(昭和23年10月)  
林・近藤：高周波増幅器の周期波増幅特性の解析
- (16) 岡・吉川：電通誌 昭16 52頁
- (17) 森 脇：電通誌 昭19 177頁
- (18) J. Gensel: T. F. T. Bd. 29 S. 17 (1940)

## 附録 1. 従来の解析手段とその得失

波形伝送回路の系を論ずるに当って先づ問題となるのはその解析手段で、その場合  
場合に依りて最も適切な解析法を採用すべきは言を俟たない。依って茲には真空管増  
幅器回路の過渡現象並びに周期波増幅特性の解析と云ふ観点から従来採用さ  
れて来た種々の解析法の概略を述べその得失を明らかにすると共に筆者の提案する解  
析法の立場を明らかにしよう。

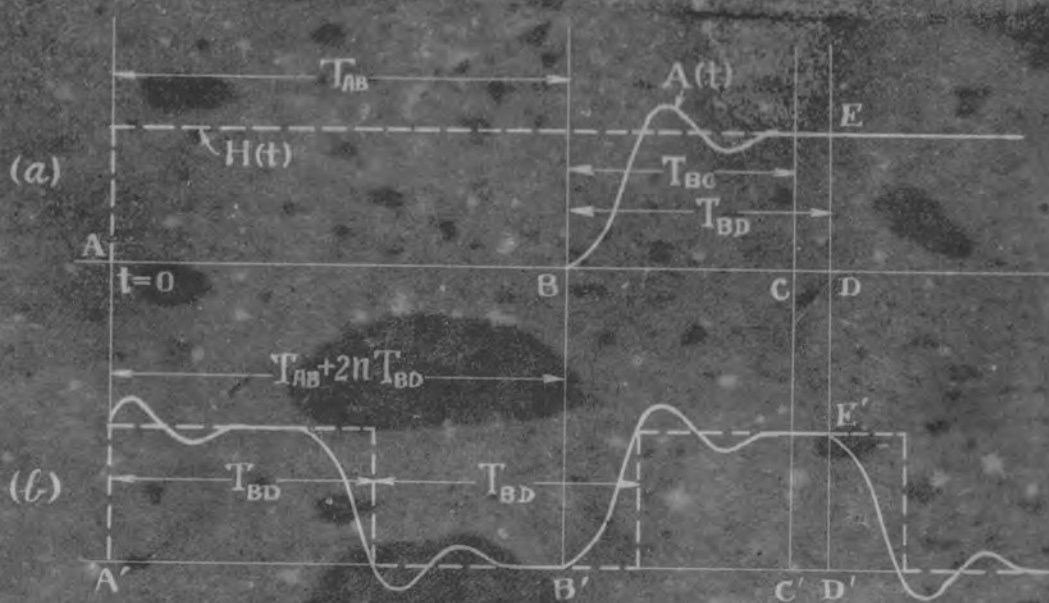
### 1.1 過渡現象の解析法

茲に謂ふ過渡現象とは単位脈波入力に対する出力  $A(t)$  (通常インパルス量と称  
せられるもの) 或は単位衝撃波入力に対する出力  $h(t)$  (通常伝播時間スペクトル  
と称せられるもの) を指してゐる。之の解析法は大別して三つの方法がある。即ち Four-  
ier 積分法を利用する方法、演算子法を利用する方法並びに Fourier 級数を利用する方  
法が夫である。之等の内 Fourier 積分法は元来演算子法と根本的に異なるものでありな  
い。従前者は主として物理的概念と密接な関係の下に展開されたものに対し、後者は  
その起源は別として主として純数学的立場から発展して来たものであり、数学的な根拠の  
上から云へば「後者が優つてゐるもの」と云へる。緒論 1.1 に述べた如く回路の周波数特性  
 $H(f)$  と  $h(t)$  との間には、Fourier 積分法に依りて

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.1)$$

なる関係がある。従つて具体的な回路を指定せず回路の周波数特性のみを仮定し  
さへすれば「所要の過渡現象を計算し得る訣で」、斯る方法にて計算する場合には通  
常実在の回路の周波数特性を大なり小なり理想化した周波数特性を採用して  
ゐる。(これは周波数特性に一般性を付與する為と計算を可能又は容易ならしめん  
とする意図に外ならない。) その結果、得られた出力波には、実在の回路には存在し得  
ない様な振動を生じたり、出力波が入力印加以前に現はれたりする等種々物理的  
に誤った結果に到達する。茲に近年に於ける過渡現象の明瞭な要求は斯る方法に  
て計算せられた結果より遙かに厳密なものを要求して居り、周波数特性の理想化に依つて  
は凡そその見当を付け得る程度で個々の具体的な回路に就いて厳密な解析を行ふ必要  
があり、此の目的には寧ろ演算子法を利用する方が「便利で」もあり、又「確実で」もある。

一方 Fourier 級数を利用する方法とは、A. D. Bedford & G. L. Firendall<sup>(4)</sup> が  
補償型抵抗結合増幅器の過渡現象を論じるに際して採用せる方法で「その大要  
は次記の如くである。



第 1-1 圖



或る伝送回路に単位矩形波入力  $H(t)$  が印加された時の出力  $A(t)$  が、図 (a) の実線にて示すが如く  $T_{AB}$  まで遷移して現れ始め、更に  $T_{BC}$  後には実質的には完全に定常状態に到着すると仮定する。斯る回路に同図 (b) の実線の如く  $T_{BD}$  (但し  $T_{BD} \geq T_{BC}$ ) なる幅を有し、 $2T_{BD}$  を周期とする周期的矩形波が印加された時の出力は、同図 (c) の実線の如くになり、所要の  $A(t)$  との間には一般に次ぎの関係がある。

(1) (c) 図に於ける  $BD$  間の波形は (b) 図の  $B'D'$  間の波形と一致する。

(2)  $T_{AB} = T_{A'B'} + 2nT_{BD}$  ( $n$ : 正整数) (図は  $n=0$  なる場合を示す。)

従つて周期的矩形波入力に対する出力を、Fourier 級数法に依つて求める時は、 $B'D'$  間の波形から所要の  $A(t)$  が求められる。

此の方法は、後述の周波数現象の解析法としての Fourier 級数法の長所及び短所を有し、高域濾波器の解析には不適當であるのみならず、更に下記の如き欠点がある。

(1)  $T_{AB}$  の決定には  $T_{A'B'} = 2nT_{BD}$  を附加しなければならぬが、 $n$  の値を如何に選ぶ可きかを他の何等かの方法で決定しなければならぬ。

(2) 低域ならぬに帯域濾波器に於て、其の帯域幅がない場合、或は遮断特性が緩んで振幅特性が永く尾を引く場合に在ては、有効な Fourier 級数の項数が多くなり、その数値計算は煩雜である。然して此の項数を求めるに少くする為には  $T_{BD} \geq T_{BC}$  なる範囲で可及的に小さくすることが必要であるが、その最小値  $T_{BC}$  の値は元素解析の結果明らかとなるもので、之れを他の何等かの方法で予めその大略の値でも知る必要がある。

上言 (1) 及び (2) の欠点の中前者は該伝送系の位相の周波数特性から比較的容易に決定し得るが (2) の欠点は現在の處如何ともし難い。

尚序でに任意の波形を有する入力に対する出力波形の解析法に就いて一言して置かう。此の場合にも上述の各解析法を利用して直接所要の出力を求めし得るが、實際の場合には、或る特定の波形の入力に対する出力のみが問題となることは稀で、多くはその伝送回路の一般の過渡特性換言すれば  $A(t)$  或は  $f(t)$  を求めた後與へられた特定の入力に対する出力波形を算定可き場合が多い。斯る様な場合には、入力を  $e(t)$ 、出力を  $f(t)$  とすれば

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e(t-\tau) A(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

$$= A(0)e(t) + \int_0^t e(t-\tau) R(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

にて算定せられる。然るに  $e(t)$  及  $A(t)$  或は  $R(t)$  の何れか一方が図式的に與へられた場合或は上記の積分が困難な場合には、之を圖式的に解くことを考へなければならぬ。

これには次の2つの方法がある。

[A] A.I. Nerkenの方法<sup>(6)</sup>

又て  $f(t) = \frac{dA(t)}{dt}$  なるを以て (1.3) 式は

$$f(t) = A(0)e(t) + \int_0^t e(t-\tau)A'(\tau)d\tau \quad (1.3)'$$

となる。上式の積分の上限  $t$  の代りに  $A(t)$  を採用すれば

$$f(t) = \int_0^{A(t)} e(t-\tau)dA(\tau) \quad (1.3)''$$

但し (1.3)' 式の  $A(0)e(t)$  なる項は、上記の積分の下限に含まれてゐる。上式は縦軸に  $e(t-\tau)$  を、 $A(\tau)$  を横軸に取って曲線図を描き、之れと両座標軸との間の面積を測定することによって容易に且つ厳密に解き得る。

[B] 反響スペクトラムを利用する方法

H.A. Wheeler<sup>(7)</sup> の提案せる反響スペクトラムを利用した方法で、伝送回路の周波数特性が

$$H(f) = 0 \quad |f| > f_c \quad (1.4)$$

なる時は

$$f(t) = A(0)e(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f(n\tau_c) e(t-n\tau_c) H(t-n\tau_c) \quad (1.5)$$

なることを利用すれば  $f(t)$  は入力と相似な波形の集合として表し得る言てゐる。

然し此の方法は我々の目的には次の如き欠点を有する。即ち我々の解析の対照たる矩形波三角波等の特殊波形衝撃波入力に於ては、その周波数スペクトラムは、勿論無限の周波数帯に及び、然も高周波数帯に於けるスペクトラム成分の出力波形に及ぼす影響は極めて大で、與へられた回路の周波数特性  $H(f)$  としては、回路の性質に依つて、(1.4) なる制限を設けることが不可能であるか、又可能であつても  $f_c$  を充分大に取るべしといふべき。之れに依つて  $\tau_c$  は 0 又は極めて小なる値となり  $f(n\tau_c)$  は  $n$  が  $\infty$  又はそれに近い値の時限り  $f(n\tau_c) \equiv 0$  と見做して差支へない。従つて (1.5) 式の項数は其の場合非常に多くなり、實際的には其の方法にて計算するのは相当な手数要する。

## 1.2 包絡線力の解析法。

無線通信回路に於ては伝達すべき波形で搬送波を変調して被変調波となし之を檢波して所要の信号を取出す。然るに檢波して得られた信号波形は入力被変調波の包絡線形に依つて決まる。従つて受信波の包絡線は包絡線形の如く示す懸つてゐる。従つて其の概略伝送回路の解析に際して、若し入力被変調波の代りにその包絡線を採用し、直接包絡線力を求め得る簡単な解析法があれば甚だ便利なるは言さずもない。

この目的の爲に従来より場合々々に依りて種々の方法が提案されて来たが之等は結局下記の  
方法と根本的な相違はない。即ち今入力

$$E(t) = R(t) e^{j2\pi f_0 t} \quad (1.6)$$

とし、 $E(t)$  及び  $R(t)$  の周波数スペクトラムを夫々  $E(f)$  及び  $K(f)$  とすれば

$$K(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1.7)$$

$$E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-j2\pi f t} dt = K(x) \quad \text{但し } x = f - f_0 \quad (1.8)$$

従つて周波数特性が  $x(f)$  にて與へらる伝送回路を通過せる時の出力  $f(t)$  は

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) x(f) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) x(x+f_0) e^{j2\pi x t} dx \quad (1.9)$$

従つて

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) x(x+f_0) e^{j2\pi x t} dx \quad (1.10)$$

が所要の包絡線であり、通過帯域が  $-f_0 < x < f_0$  ならば

$$u(t) = \int_{-f_0}^{f_0} K(x) x(x+f_0) e^{j2\pi x t} dx \quad (1.10)'$$

となる。

然し乍ら以上の方法に於て  $u(t)$  が包絡線を表す爲には周波数特性  $x(x+f_0)$  が  $x$  のみの函数で  $f_0$  に無関係でなければならぬ。事實具體的な回路に對する周波数特性を  $x$  のみの函数として表現することは省略算を巧みに行つて仕舞て可能である。勿論此の省略は或る種の回路（本解析法に於てその種類を一般化的に規定することは勿論不可能であるが）に於ては、定常振幅に對しては実用上充分の精度を以て行はうものであるが、此の省略が通過出力に及ぼす影響の程度は明かでないといふ欠点は免れない。

尚上述の、周波数特性が  $x$  のみの函数として表されると云ふ假定は從來発表されて來た凡ての解析法に例外なく共通なものであり従つて上述の精度に及ぶ欠点は何れの解析法に對しても云へることである。

### 1.3 周期現象の解析法

周期的駆動力に依つて誘起される現象の解析法として種々の方法が提案されてゐるが之れ等を大別すれば“欠き”の三者になる。

(a) Fourier級數法 (b) 演算子法を利用する方法 (c) 未定常數法

以下之等に就いて簡單な考察を言ひよう。

(a) Fourier級數法

本方法に就いては説明するまでもない事ではあるが、周期的入力を Fourier 級数

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad \left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty}} \right\} \quad (1.11)$$

$$\omega = 2\pi/T \quad (T: \text{周期})$$

にて表はし、角周波数  $n\omega$  に対する、該伝送系の利得並に位相の遅れを夫々  $G_n$  及び  $\theta_n$  とせば、所要の出力は

$$f(t) = G_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \{ a_n \cos(n\omega t - \theta_n) + b_n \sin(n\omega t - \theta_n) \} \quad (1.12)$$

にて算定せられる。此の方法は云々位もなく従来最も広く用いられて来たもので、周波数特性  $G_n$  及び  $\theta_n$  が如何に複雑であつても、又具体的な回路は寧ろ単に  $G_n$  及び  $\theta_n$  が與へられれば（仮令夫が図式的に與へられても）極めて簡単に解析を得る。然しこの一見完璧に見える解析法も次の様な欠点を包蔵するものである。

(1)  $f(t)$  が不連続点を有する場合（仮令は“高域濾波器”に不連続的入力を周期的に印加せる場合）には (1.12) 式の  $a_n G_n$  及び  $b_n G_n$  の收斂度は  $O(1/n)$  であり、之に數値計を施して現象の真相を描おせんが爲には、極めて高位の高周波に至る迄計算を施行するの要あり、特に不連続点の近傍に於ける形状は所謂 Gibbs の現象<sup>(1)</sup> を有するもの存在の爲如何程精密な計算を施行しようとも、現象の真相を正確に描おすることは原理的に不可能である。

尚  $O(1/n)$  なる收斂度を有する Fourier 級数は項別微分が不可能なることも根本的な欠陥の一つである。

(2) 以上は  $f(t)$  が不連続点を有する場合の考察であるが、仮令は不連続点を有たざる場合と雖も、一次微係数が不連続的な突或ち角形尖出部を有する場合に於ても、斯様な点を數値計算に依つて精密に描おせんとするには極めて高位の項に至る迄に數値計算を施行するの要あり、之亦その類に属すべし。

以上の欠点は通帯帯域幅の広い伝送系に、周期的な矩形波、三角波、或は鋸歯状波等の特殊不連続的入力がかへられた時の出力を計算するに當つて常に遭遇する欠点であり、斯る場合の解析法としては Fourier 級数は不適当である。

尚 Fourier 級数若ては他の欠点ではないが、 $G_n$  及び  $\theta_n$  を仮定して出力を求めるときには、Fourier 積分法に於けると同様、物理的に矛盾せる出力波を得ることがあり注意を要する。

#### [B] 周期現象の解析に対する演算手法

周知の如く、 $T$  を周期として、 $T > t > 0$  の間で  $e(t)$  なる値を有する周期函数  $e(t)$  の  $p$  函数は



$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \frac{p E_0(p)}{1 - e^{-pT}} \\ E_0(p) &= \int_0^T e_0(t) e^{-pt} dt \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

にて與へられる。(1.2)~(1.5)

従つて上記の $e(t)$ がインデシャル量が $\psi(p)$ なる回路に於けられた場合の出力 $f(t)$ は

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{E(p)\psi(p)}{p} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\psi(p)}{1 - e^{-pT}} e^{pt} dp \\ \psi(p) &= E_0(p)\psi(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

或は  $\psi(p) = N(p)/M(p)$  とおけば

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{N(p)}{M(p)} \frac{e^{pt}}{1 - e^{-pT}} dp \quad (1.15)$$

初て上式右辺の計算法に種々の方法が考へられてゐる。

(a) 展開定理に依る方法

(1.15)式に直ちに展開定理を適用すれば

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

但し $f_2(t)$ は $M(p)=0$ なる特異点に起因する値で $M(p)=0$ の根を $p_1, p_2, \dots, p_m$ とし且つ之等は凡て單根なりとせば

$$f_1(t) = \sum_{i=1}^m \frac{N(p_i)}{M'(p_i)} \frac{e^{p_i t}}{1 - e^{-p_i T}} \quad (1.16)$$

にて與へられる過渡項である。一方 $f_2(t)$ は $(1 - e^{-pT})=0$ なる特異点に基づく値で

$$f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{N(j\frac{2n\pi}{T})}{TM(j\frac{2n\pi}{T})} e^{j\frac{2n\pi}{T}t} \quad (1.17)$$

なる定常項である。上式は $1/T$ を基本周期とするFourier級数に外ならない。従つて結果的にはFourier級数法に過渡項が追加された丈で、上述のFourier級数法の欠点は本解析法に於ては除去出来ない。従つて本解析法は出力波形の周明に使用することは稀である。寧ろ、與へられた周期函数のFourier級数の係数を求めるのに用ひて便利且つ適切である。<sup>(1.2)(1.3)</sup>

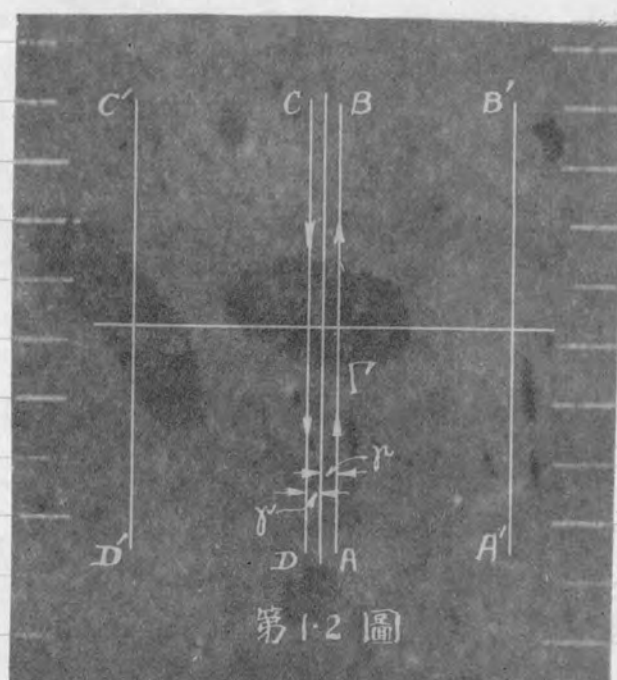
(b)  $1/(1 - e^{-pT})$ を無限級数に展開する方法

上述せる通りに依れば、 $1/(1 - e^{-pT})$ なる項の存在に依りFourier級数法と同一結果を得た事に全量、

$$\frac{1}{(1 - e^{-pT})} = 1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots$$

となし、之を(1.16)式に代入すれば





$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \quad \left. \begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{N(p)}{M(p)} \varepsilon^{-npT} = \sum_{i=1}^m \frac{N(p_i)}{M'(p_i)} \varepsilon^{p_i(t-nT)} H(t-nT) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

となる。上式は C. W. Condon<sup>(14)</sup> が相乗定理を利用して誘導する結果と一致する。

然るに (1.18) 式に在っては定常項と過渡項との分離は不可能にして、且つ入力の周期  $T$  に比して減衰の小さな回路に在つては、定常状態を構成する項の電圧は非常に大となり定常現象を論ずるのに便利な形とは云ひ難い。

此に対し山田直平教授は次の如き極めて簡便な方法を提へて居られる。<sup>(15)</sup> 即ち定常状態のみに着目し (2) の式に於ける定常項  $f_s(t)$  が生じた所以を考へるに  $1/(1-\varepsilon^{-pT})$  の特異点がある原因をなす。従つて積分路を Fig. 1.2 図に  $\Gamma$  となる様に置き、その内部にある特異点としては  $(1-\varepsilon^{-pT})=0$  なる極のみである様にすれば明かに

$$f_s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{N(p)}{M(p)} \frac{\varepsilon^{pt}}{1-\varepsilon^{-pT}} dp \quad (1.19)$$

なる関係がある。之の積分路を  $A'B'$ ,  $C'D'$  に移動させ  $M(p)=0$  の特異点をこの中に含ませる時は

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{A'B'} \frac{N(p)}{M(p)} (1 + \varepsilon^{-pT} + \varepsilon^{-2pT} + \dots) \varepsilon^{pt} dp \\ &\quad - \frac{1}{2\pi j} \int_{C'D'} \frac{N(p)}{M(p)} (1 + \varepsilon^{pT} + \varepsilon^{2pT} + \dots) \varepsilon^{p(t+T)} dp \\ &\quad - \left( \frac{N(p)}{M(p)} \frac{\varepsilon^{pt}}{1-\varepsilon^{-pT}} \text{ の } M(p)=0 \text{ なる極に於ける留数の和} \right) \end{aligned}$$

従つて  $T > t > 0$  の間に  $t$  を取れば

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{A'B'} \frac{N(p)}{M(p)} \varepsilon^{pt} dp - \sum_{i=1}^m \frac{N(p_i)}{M'(p_i)} \frac{\varepsilon^{p_i t}}{1-\varepsilon^{-p_i T}} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{N(p_i)}{M'(p_i)} \frac{\varepsilon^{-p_i T}}{1-\varepsilon^{-p_i T}} \varepsilon^{-p_i t} \end{aligned} \quad (1.20)$$

上式に依れば、定常状態は有限個の項の集合を以つて表現せられ、Fourier 級数法に如き欠点はない。此の如きは他の解析方法に比して極めて巧妙な解析法と云へる。

然し以上の方法で取扱ひ得るのは定常状態のみであり過渡状態の解析は不可能である。又入力が図式自給に與へられた時の図式角解析には不適当なる議は免れまい。

## (C) 未定常數法

N. Marchand<sup>10)</sup>の提案せる方法で定常状態の解析を目的とするものである。今周期的入力の一周期間の波形を $e(t)$ とし所要の現象 $x$ に対して

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)x = e(t) \quad (1.21)$$

$$D = \frac{d}{dt}$$

なる微分方程式が成立すると仮定する。(但し $a_i$ は常數) 上式の一般解は

$$x = x_p + x_c$$

にて與へられる。但し $x_p$ は特殊解を意味し、 $x_c$ は(1.21)式に於て $e(t)=0$ とせる場合の一般解で

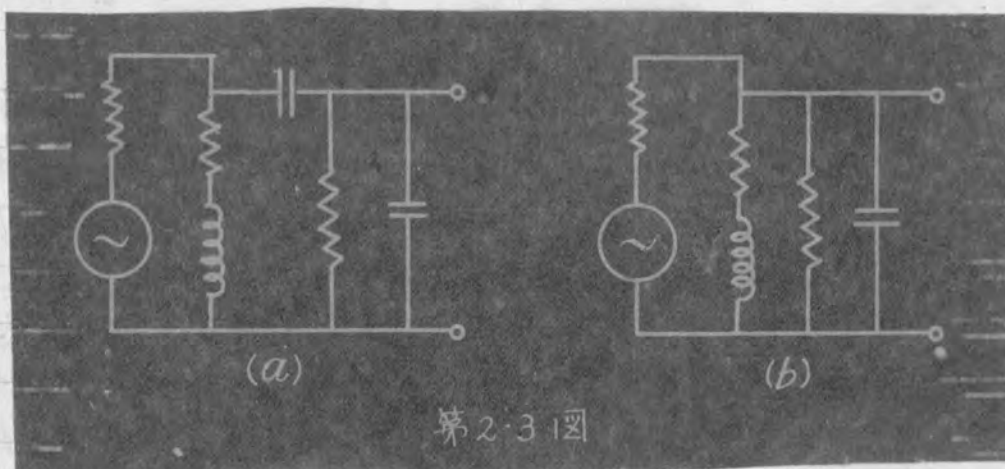
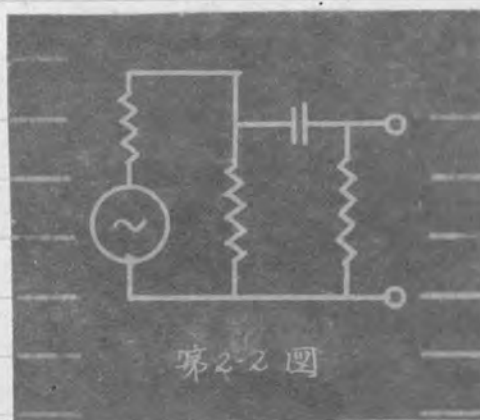
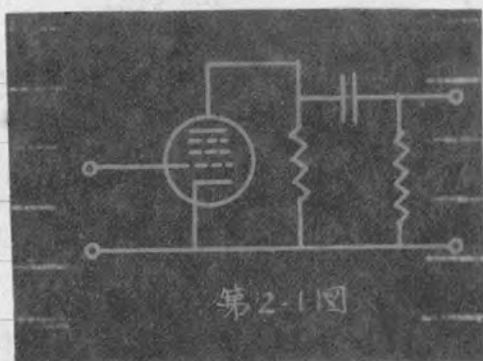
$$x_c = A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t} + \dots + A_n e^{m_n t}$$

但し $m_1, m_2, \dots, m_n$ は

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0$$

の根にて、 $A_1, A_2, \dots, A_n$ は積分常數である。之等の積分常數の値を、定常状態で一周毎に同じ状態を繰返へす爲、その周末値と初期値との間には一定の關係あることから決定すると云ふのである。然しその具体的な關係式に就ては、何等の説明も行はれて居らず、同氏は之を本題めて簡単な例題に就いて解説してゐるに過ぎない。

以上の方々は一般性に乏しく、原方程式の階數が大に於ては積分常數 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の決定法は本題めて複雑となるから推奨出来る方法と云へない。



## 附録 2. 真空管増幅器回路の過渡現象並びに周波数増幅特性 に関する従来の研究の概観

### 2.1 低周波増幅器回路に関する従来の研究

各種の低周波増幅器回路中、その過渡現象が最も問題となるのは、広帯域増幅器として、テレビジョン其の他、波形の忠実な増幅の為に使用される抵抗結合増幅器であろう。依つて先づ之れに関する従来の研究を概観しよう。

即ち C. W. Oateley<sup>(18)</sup> 及び H. M. Lane<sup>(19)</sup> はオア21図に示す抵抗結合増幅器の華僑回路をオア22図の如く<sup>(18)</sup>に考へ、前者は単段増幅器に就いて、三角形波及び三角波の出力波形を解析し、後者は多段増幅器に就いて単位周波数関数入力及び時間と共に直線的に増加する入力に対する出力を解析し、その結果の一応用例として、三角波及び梯形波の出力を求めてゐる。

然し今の場合の華僑回路をオア22図の如くに仮定する事は低周波特性(長時間域特性)を論ずる限りに於ては差支へないが、高周波特性に対しては真空管の内部静電容量や配線容量等を考慮しなければならぬ。この微小容量の影響をいならしめ、上域遮断周波数(upper cut off frequency)を向上せしめ、帯域幅を拡張し、高周波特性を改善する為に種々の補償が行はれてゐる。<sup>(20)</sup> 之れが最も代表的な回路としては陽極負荷抵抗に直列に僅かにインダクタンスを挿入する方法が挙げられる。オア23図(a)はその華僑回路を示す。同図(b)はその高周波華僑回路を示すもので、低周波華僑回路はオア22図と同じである。オア23図(b)の回路は<sup>(21)</sup>高周波域の過渡現象の研究の代表的なものとして、N. W. McLachlan<sup>(21)</sup> と A. V. Bedford 及び G. L. Frendall<sup>(22)</sup> の研究を挙げることが出来る。即ち前者は単段の場合に就いて、主として数値例に依りインデシャル増幅率<sup>\*</sup>を図示し、後者は附録1の1-1に説述せる Fourier 級数法に依り主として多段増幅器(段数は10段乃至數十段)に就いてインデシャル増幅率を解析し、補償用のインダクタンスの値とインデシャル増幅率との関係を設計の立場から論じてゐる。

其の他 W. Jackson<sup>(23)</sup> は抵抗結合のみならず各種の単段低周波増幅器の過渡現象の計算式を誘導してゐるし、又渡辺<sup>(23)</sup> 及び岡村教授は抵抗結合増幅器に種々性質を異にせる饋入を施した場合の過渡現象を論じてゐる。



## 2.2 高周波増幅器回路に関する従来の研究

高周波増幅器回路そのものについての研究は比較的少く、一般の増幅器として周波数特性を仮定し、過渡特性を論じたものが多い。従つて以下後章に就いては増幅器回路に属する回路のみを取り上げてその相違点を述べる。

高周波回路に於て最も問題とするのはお力の包絡線波形で、その解析には附録1の1.2に述べた如き意に未の近似計算を行つてゐることは殆んど凡ての研究に共通である。

概して高周波増幅器中最も基本的にして且つ最もよく用ゐられるのは云い迄もなく2.4図に示すが如き単一同調回路増幅器であることは云い迄もない。従つて従来の研究も之に関するものが大部分を占めてゐる。即ち梁谷氏<sup>(24)</sup>は氏の提唱せる包絡線解析の一応用例として、 $L-C-R$ 並列回路に  $I_{co}$  の値なる強制電流を通じた時の過渡お力の包絡線波形を論じ R. Feldkeller 氏<sup>(25)</sup>は同様の由展を反響スベクトラムに依つて解析してゐる。又梁谷氏<sup>(26)</sup>は該回路に定速度で角周波数が変化する高周波入力がかへられた時の包絡線お力を反響スベクトラムを利用して解析し角周波数の変化の割合とお力波形との關係を論じてゐる。其の他高田安兼両氏<sup>(27)</sup>は、周波数特性が中央周波数の両側に於て対称であるとの仮定を設け Fourier 級数法に依り、単一同調回路を解析し、16項までの数値計算に依り周期的矩形波変調高周波入力に対するお力波形の離調に依る変化をだめてゐる\*。

以上は単段単一同調回路増幅器の過渡現象であるが、岡、吉川両氏<sup>(28)</sup>は結合回路多段増幅器を直流及び中周波数に同調せる高周波入力をして励振せる場合の包絡線お力を解析し、J. Genise/氏<sup>(29)</sup>は単段単一同調回路並に結合回路の過渡現象を論じ、且つお力の受けた周波数変調の模様を明かにしてゐる。又単一同調回路並に結合回路のみならず之等の組合せより成る三同調回路増幅器の多段増幅器に就ての精細な研究が森脇教授<sup>(30)(31)</sup>に依つて行はれてゐる。即ち同教授は多重の形の代数的周波数特性より、同調時及び常調時の過渡現象並に遅延時間を計算し、之れを利用してハルス幅、周波数特性及び離調度とお力波形との關係が詳細に論ぜられてゐる。

\* 入力は周期的矩形波変調高周波なるも、数値計算には周波数が充分長く、入力の周期性の影響は殆んどなく、実質的には所謂過渡現象を計算したことになる。

又單段及び二段の單一同調回路増幅器に施した饋送が出力に及ぼす影響に就いては渡辺及び岡村教授の研究がある。<sup>(23)</sup>

一方本論文の主題から多少横道に外れるが、具体的回路を指定せず單に周波数特性のみを仮定し過渡現象を論じたものも少なくない。即ち Kumpf Müller 氏は<sup>(1)</sup>理想的な低域及び帯域濾波器即ち直線帯域内に於ては、振幅特性は一定で位相特性は直線的変化をなすとし、抑圧帯域に於ては振幅特性を零と仮定し、該回路に單位函數或は夫れを包絡線とする高周波入力がかへられた時の遅延時間、振動確立時間或は矩形衝擊波入力に対する出力波形を解析し、S. Goldmann 氏は<sup>(2)</sup>振幅特性を梯形と仮定し、位相特性は前者と同様直線的変化をなすと仮定し、單側帯波通信の利失を解析的に究明し、テレビジョン伝送に於ける影響を論じてゐる。其の他單側帯波通信に關する解析的研究は枚挙に遑なき現状で、染谷氏<sup>(3)</sup>は、S. Goldmann 氏と同じ周波数特性に就いて、反響スペクトルを利用して波形の歪を究明し、H. E. Kallmann, R. E. Spencer 及び<sup>(3)</sup>C. P. Singer 氏は遮断特性が上述の如き直線的なもののみならず"拋物線特性"を呈する場合に就いて單位函數の包絡線と有する高周波入力に対する出力包絡線を求め遮断特性の形狀と包絡出力との關係を明かにしてゐる。

一方周波数増幅特性の解析とは云ひ難いか S. Goldmann 氏は上述の單側帯波通信の解析結果を利用し、入力に接近せる二つの矩形衝擊波を交差する時の出力包絡線を求め、單側帯波通信に在つては知らざる場合に対して良く二つの衝擊波を分離し得ることを數値例に就いて明かにしてゐる。

# 附録3 $B_2(A t_0)$ の値に就いて

多段増幅器の定常周期的インデシャル増幅率  $S(\tau)$  を求める際

$$\frac{d^l}{dA^l} \frac{\varepsilon^{-A t_0}}{1 - \varepsilon^{-A t_0}} \quad (3.1)$$

なる値を知る必要がある。例へば各段同一の回路定数と有する低周波  $m$  段  
1 回路増幅器の  $S(\tau)$  は、第 II 篇 (4.3.1) 及び (4.3.2) 式より

$$S(\tau) = \frac{G^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left[ A^{m-1} \left\{ H(\tau) \varepsilon^{-A\tau} + \frac{\varepsilon^{-A t_0}}{1 - \varepsilon^{-A t_0}} \varepsilon^{-A\tau} \right\} \right] \quad (3.2)$$

にて與へられる。上式右辺に於ける微分演算を實際に施行する時は  $\{\dots\}$  の中の  
第 2 項より次の計算を必要とする。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ A^{m-1} \frac{\varepsilon^{-A t_0}}{1 - \varepsilon^{-A t_0}} \varepsilon^{-A\tau} \right\} \\ &= \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{s!} \frac{d^s}{dA^s} (\varepsilon^{-A\tau}) \sum_{l=0}^{m-s-1} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dA^l} \left( \frac{\varepsilon^{-A t_0}}{1 - \varepsilon^{-A t_0}} \right) \frac{d^{m-s-l-1}}{dA^{m-s-l-1}} \left( \frac{A^{m-1}}{(m-s-l-1)!} \right) \\ &= \varepsilon^{-A\tau} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-A\tau)^s}{s!} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^{l+s}}{(m-1-l-s)!} \frac{(A)^l}{l!} \frac{d^l}{dA^l} \left( \frac{\varepsilon^{-A t_0}}{1 - \varepsilon^{-A t_0}} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

上式右辺の末尾に (3.1) 式の値が現はれてゐる。

以下 (3.1) 式の値を求めて見よう。今簡單の爲に

$$y = \varepsilon^{-A t_0}; \quad x = \frac{\varepsilon^{-A t_0}}{1 - \varepsilon^{-A t_0}} = \frac{y}{1-y} \quad (3.4)$$

と置けば

$$\frac{d}{dA} = \frac{dy}{dy} \cdot \frac{dy}{dA} = -t_0 y \frac{d}{dy}$$

なるを以て、 $l \neq 0$  ならば

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{dA^l} \frac{\varepsilon^{-A t_0}}{1 - \varepsilon^{-A t_0}} &= \frac{d^l x}{dA^l} = (-t_0)^l y \frac{d}{dy} \left[ y \frac{d}{dy} \left\{ \dots y \frac{d}{dy} \left( y \frac{dx}{dy} \right) \right\} \right] \\ &= (-t_0)^l \left\{ C_1^l y \frac{dx}{dy} + C_2^l y^2 \frac{d^2 x}{dy^2} + \dots + C_l^l y^l \frac{d^l x}{dy^l} \right\} \\ &= (-t_0)^l \sum_{r=1}^l C_r^l y^r \frac{d^r x}{dy^r} \end{aligned} \quad (3.5)$$

茲に

$$C_j^i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i>j \\ \begin{cases} C_{j-1}^{i-1} + C_{j-1}^i \times i & (i \geq 2) \\ 1 & (i=1) \end{cases} & i < j \end{cases} \quad (3.6)$$

で、これが実際の数値は表3.1表の如くである。(次頁にあり。)

次に

$$y^2 \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{n! x^{n+1}}{y}$$

より

$$\frac{d^l x}{dA^l} = \frac{(-t_0)^l}{y} \sum_{n=1}^l n! C_n^l x^{n+1} \quad (3.7)$$

となる。

一方  $l=0$  なる場合には

$$\frac{dx}{dy^2} = x \quad (3.8)$$

となる。従って今  $B_l(A t_0)$  を

$$B_l(A t_0) = \begin{cases} x = \frac{e^{-A t_0}}{1 - e^{-A t_0}} & (l=0) \\ \frac{1}{y} \sum_{n=1}^l \frac{n!}{l!} C_n^l x^{n+1} = e^{A t_0} \sum_{n=1}^l \frac{n!}{l!} C_n^l \left( \frac{e^{-A t_0}}{1 - e^{-A t_0}} \right) & (l \neq 0) \end{cases} \quad (3.9)$$

と定義すれば、(3.5)、(3.7) 及び (3.8) より任意の  $l$  の値に対して

$$\frac{d^l}{dA^l} \left( \frac{e^{-A t_0}}{1 - e^{-A t_0}} \right) = (-t_0)^l l! B_l(A t_0) \quad (3.10)$$

と表はす事が出来る。これ所需の計算式である。

例へば上式を (3.2) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dA^{m-1}} \left\{ A^{m-1} \frac{e^{-A t_0}}{1 - e^{-A t_0}} e^{-A \tau} \right\} \\ &= e^{-A \tau} \sum_{\Delta=0}^{m-1} \frac{(-A \tau)^\Delta}{\Delta!} \sum_{l=0}^{m-\Delta-1} m-\Delta-l (-A t_0)^l B_l(A t_0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

を得る。式は II 編 (4.3.4) 式に外ならない。



(a)  $\delta = 0$ 

$\Phi_n$	$At_0 = 1$	$At_0 = 2$	$At_0 = 3$	$At_0 = 5$
$\Phi_0$	0.58198	0.156518	$5.2396 \times 10^{-2}$	$6.7837 \times 10^{-3}$
$\Phi_1$	1.50265	0.52003	$2.1782 \times 10^{-1}$	$4.0932 \times 10^{-2}$
$\Phi_2$	2.4988	0.99539	$4.9196 \times 10^{-1}$	$1.27461 \times 10^{-1}$
$\Phi_3$	3.4999	1.50074	$8.2218 \times 10^{-1}$	$2.7558 \times 10^{-1}$
$\Phi_4$	4.5000	2.0034	1.16383	$4.7062 \times 10^{-1}$

(b)  $\delta = 0.5$ 

$\Phi_n$	$At_0 = 1 + 0.5j$		$At_0 = 2 + j$		$At_0 = 3 + 1.5j$		$At_0 = 5 + 2.5j$	
	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部
$\Phi_0$	$3.8295 \times 10^{-1}$	$-3.6020 \times 10^{-1}$	$6.8827 \times 10^{-2}$	$-1.30596 \times 10^{-1}$	$1.04780 \times 10^{-3}$	$-4.9889 \times 10^{-2}$	$-5.3851 \times 10^{-3}$	$-3.9892 \times 10^{-1}$
$\Phi_1$	1.10085	$-7.9634 \times 10^{-1}$	$3.0924 \times 10^{-1}$	$-3.7493 \times 10^{-1}$	$7.1718 \times 10^{-2}$	$-2.0203 \times 10^{-1}$	$-2.2379 \times 10^{-2}$	$-3.7151 \times 10^{-1}$
$\Phi_2$	1.89945	-1.20163	$6.9250 \times 10^{-1}$	$-6.0754 \times 10^{-1}$	$2.7481 \times 10^{-1}$	$-3.9957 \times 10^{-1}$	$-2.4233 \times 10^{-2}$	$-1.40167 \times 10^{-1}$
$\Phi_3$	2.7001	-1.60014	1.10108	$-8.0521 \times 10^{-1}$	$5.6032 \times 10^{-1}$	$-5.5646 \times 10^{-1}$	$5.3954 \times 10^{-2}$	$-3.1100 \times 10^{-1}$
$\Phi_4$	3.5000	-1.99991	1.42535	$-7.4175 \times 10^{-1}$	$8.4290 \times 10^{-1}$	$-6.7340 \times 10^{-1}$	$2.4418 \times 10^{-1}$	$-4.7525 \times 10^{-1}$

(c)  $\delta = 1.0$ 

$\Phi_n$	$At_0 = 1 + j$		$At_0 = 2 + 2j$		$At_0 = 3 + 3j$		$At_0 = 5 + 5j$	
	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部
$\Phi_0$	$8.5973 \times 10^{-2}$	$-4.1957 \times 10^{-1}$	$6.5993 \times 10^{-2}$	$-1.08811 \times 10^{-1}$	$-4.7016 \times 10^{-2}$	$-6.3811 \times 10^{-3}$	$1.87295 \times 10^{-3}$	$6.48571 \times 10^{-1}$
$\Phi_1$	$4.9501 \times 10^{-1}$	$-9.9396 \times 10^{-1}$	$-2.4049 \times 10^{-2}$	$-4.4467 \times 10^{-1}$	$-1.64212 \times 10^{-1}$	$-1.58264 \times 10^{-1}$	$-2.1505 \times 10^{-2}$	$4.8208 \times 10^{-1}$
$\Phi_2$	1.00189	-1.50346	$2.3992 \times 10^{-2}$	$-7.8200 \times 10^{-1}$	$-1.22226 \times 10^{-1}$	$-5.2459 \times 10^{-1}$	$-1.85459 \times 10^{-1}$	$9.2129 \times 10^{-1}$
$\Phi_3$	1.50063	-1.99962	$5.2200 \times 10^{-1}$	-1.00450	$1.98621 \times 10^{-1}$	$-7.9738 \times 10^{-1}$	$-5.2936 \times 10^{-1}$	$1.18411 \times 10^{-1}$
$\Phi_4$	1.99979	-2.5000	$7.4805 \times 10^{-1}$	-1.23858	$4.5677 \times 10^{-1}$	$-8.0642 \times 10^{-1}$	$-6.6303 \times 10^{-1}$	$8.3089 \times 10^{-1}$

(d)  $\delta = 2.0$ 

$\Phi_n$	$At_0 = 1 + 2j$		$At_0 = 2 + 4j$		$At_0 = 3 + 6j$		$At_0 = 5 + 10j$	
	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部
$\Phi_0$	$1.99798 \times 10^{-1}$	$-2.3230 \times 10^{-1}$	$-8.9335 \times 10^{-2}$	$8.5692 \times 10^{-2}$	$4.9980 \times 10^{-2}$	$1.53398 \times 10^{-2}$	$-5.6350 \times 10^{-3}$	$3.6244 \times 10^{-1}$
$\Phi_1$	$-1.33908 \times 10^{-1}$	$-7.9914 \times 10^{-1}$	$-5.4826 \times 10^{-1}$	$-1.28336 \times 10^{-1}$	$1.05466 \times 10^{-1}$	$2.7942 \times 10^{-1}$	$-6.9553 \times 10^{-2}$	$-3.4652 \times 10^{-1}$
$\Phi_2$	$1.25137 \times 10^{-1}$	-1.20840	$-3.7962 \times 10^{-1}$	-1.06327	-1.02625	1.13247	$-3.5461 \times 10^{-2}$	$-4.4492 \times 10^{-1}$
$\Phi_3$	$3.0143 \times 10^{-1}$	-1.58973	$6.5282 \times 10^{-1}$	$-8.0691 \times 10^{-1}$	-4.0912	$-8.2876 \times 10^{-1}$	1.36518	$-9.8147 \times 10^{-1}$
$\Phi_4$	$5.0497 \times 10^{-1}$	-2.0051	$-3.9606 \times 10^{-1}$	$2.8925 \times 10^{-2}$	-2.5926	$-9.0499 \times 10^{-1}$	4.2327	1.81290

第34表  $\Phi_n(At_0)$  の値



$At_0 \backslash \ell$	0	1	2	3	4	5
0.1	9.5083	9.9917	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
0.2	4.5167	4.9834	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000
0.5	1.54149	1.95885	1.99949	2.00017	2.00006	2.00000
1.0	0.58198	0.92067	0.99615	1.00109	1.00014	0.99998
2.0	0.156518	0.36351	0.47536	0.50349	0.50264	0.50019
3.0	0.052396	0.165423	0.27414	0.33023	0.34165	0.32033
5.0	0.0067837	0.034148	0.086529	0.148115	0.195043	0.215292

第3表  $(At_0)^\ell B_\ell(At_0)$  の値

$$\delta = 0.5$$

$l$	$At_0 = 1 + 0.5j$		$At_0 = 2 + j$		$At_0 = 3 + 1.5j$		$At_0 = 5 + 2.5j$	
	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部
0	$3.8295 \times 10^{-1}$	$-3.6020 \times 10^{-1}$	$6.2827 \times 10^{-2}$	$-1.30596 \times 10^{-1}$	$1.04780 \times 10^{-3}$	$-4.9889 \times 10^{-2}$	$-5.3851 \times 10^{-3}$	$-3.7872 \times 10^{-3}$
1	$3.9986 \times 10^{-1}$	$-6.3607 \times 10^{-1}$	$4.9700 \times 10^{-2}$	$-1.47015 \times 10^{-1}$	$-1.44010 \times 10^{-3}$	$-4.9993 \times 10^{-2}$	$-5.3720 \times 10^{-3}$	$-3.9463 \times 10^{-3}$
2	$1.23944 \times 10^{-1}$	$-7.0565 \times 10^{-1}$	$8.7730 \times 10^{-3}$	$-8.9235 \times 10^{-2}$	$-3.2158 \times 10^{-3}$	$-2.4977 \times 10^{-2}$	$-2.6728 \times 10^{-3}$	$-1.93045 \times 10^{-3}$
3	$-1.78059 \times 10^{-1}$	$-6.1469 \times 10^{-1}$	$-1.08576 \times 10^{-2}$	$-3.9118 \times 10^{-2}$	$-2.7374 \times 10^{-3}$	$-8.1883 \times 10^{-3}$	$-8.8206 \times 10^{-4}$	$-6.1528 \times 10^{-4}$
4	$-3.8896 \times 10^{-1}$	$-4.1980 \times 10^{-1}$	$-1.19507 \times 10^{-2}$	$-1.31625 \times 10^{-2}$	$-1.51212 \times 10^{-3}$	$-1.88473 \times 10^{-3}$	$-2.1601 \times 10^{-4}$	$-1.39907 \times 10^{-4}$

$$\delta = 1.0$$

$l$	$At_0 = 1 + j$		$At_0 = 2 + 2j$		$At_0 = 3 + 3j$		$At_0 = 5 + 5j$	
	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部
0	$8.5973 \times 10^{-2}$	$-4.1957 \times 10^{-1}$	$-6.5993 \times 10^{-2}$	$-1.08811 \times 10^{-1}$	$-4.7016 \times 10^{-2}$	$-6.3811 \times 10^{-3}$	$1.87298 \times 10^{-3}$	$6.4857 \times 10^{-3}$
1	$-8.2675 \times 10^{-2}$	$-4.9171 \times 10^{-1}$	$-7.3478 \times 10^{-2}$	$-9.4449 \times 10^{-2}$	$-4.4846 \times 10^{-2}$	$-5.7811 \times 10^{-3}$	$1.83442 \times 10^{-3}$	$6.5100 \times 10^{-3}$
2	$-2.5475 \times 10^{-1}$	$-2.5344 \times 10^{-1}$	$-4.2167 \times 10^{-2}$	$-3.2997 \times 10^{-2}$	$-2.0352 \times 10^{-2}$	$-2.3326 \times 10^{-3}$	$8.7843 \times 10^{-4}$	$3.2791 \times 10^{-3}$
3	$-2.4873 \times 10^{-1}$	$-6.4750 \times 10^{-4}$	$-1.57680 \times 10^{-2}$	$-1.86176 \times 10^{-3}$	$-5.4966 \times 10^{-3}$	$-4.4499 \times 10^{-4}$	$2.6672 \times 10^{-4}$	$1.10888 \times 10^{-3}$
4	$-1.24789 \times 10^{-1}$	$1.25099 \times 10^{-1}$	$-3.5321 \times 10^{-3}$	$3.6574 \times 10^{-3}$	$-7.9675 \times 10^{-4}$	$2.7886 \times 10^{-5}$	$5.3467 \times 10^{-5}$	$2.8499 \times 10^{-4}$

$$\delta = 2.0$$

$l$	$At_0 = 1 + 2j$		$At_0 = 2 + 4j$		$At_0 = 3 + 6j$		$At_0 = 5 + 10j$	
	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部	実数部	虚数部
0	$-1.99798 \times 10^{-1}$	$-2.3230 \times 10^{-1}$	$-8.9335 \times 10^{-2}$	$8.5672 \times 10^{-2}$	$4.9980 \times 10^{-2}$	$1.53398 \times 10^{-2}$	$-5.6350 \times 10^{-3}$	$3.6244 \times 10^{-3}$
1	$-2.1856 \times 10^{-1}$	$-1.39723 \times 10^{-1}$	$-8.8697 \times 10^{-2}$	$7.0381 \times 10^{-2}$	$5.2243 \times 10^{-2}$	$1.68733 \times 10^{-2}$	$-5.6164 \times 10^{-3}$	$3.5836 \times 10^{-3}$
2	$-9.6568 \times 10^{-2}$	$7.6646 \times 10^{-3}$	$-4.2456 \times 10^{-2}$	$2.1302 \times 10^{-2}$	$2.8474 \times 10^{-2}$	$1.00813 \times 10^{-2}$	$-2.7596 \times 10^{-3}$	$1.75124 \times 10^{-3}$
3	$-9.4130 \times 10^{-3}$	$3.6377 \times 10^{-2}$	$-1.18696 \times 10^{-2}$	$-7.5510 \times 10^{-4}$	$1.1517 \times 10^{-2}$	$4.5752 \times 10^{-3}$	$-9.1737 \times 10^{-4}$	$5.5701 \times 10^{-4}$
4	$1.36721 \times 10^{-2}$	$1.24685 \times 10^{-2}$	$-1.27178 \times 10^{-3}$	$-3.1024 \times 10^{-3}$	$3.6902 \times 10^{-3}$	$1.84723 \times 10^{-3}$	$-2.2307 \times 10^{-4}$	$1.26105 \times 10^{-4}$

第3.2表 (b)  $Be(At_0)$  の値 ( $At_0$  が複素数なる場合)

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0
7	1	63	301	350	140	21	1

第3.1表  $C_j^i$  の値

$At_0$	$B_0(At_0)$	$B_1(At_0)$	$B_2(At_0)$	$B_3(At_0)$	$B_4(At_0)$	$B_5(At_0)$
0.1	9.5083	$9.9917 \times 10$	$1.00000 \times 10^3$	$1.00000 \times 10^4$	$1.00000 \times 10^5$	$1.0000 \times 10^6$
0.2	4.5167	$2.4917 \times 10$	$1.24999 \times 10^2$	$6.2500 \times 10^2$	$3.1250 \times 10^3$	$1.56250 \times 10^4$
0.5	1.54149	3.9177	7.9980	$1.60013 \times 10$	$3.2000 \times 10$	$6.4000 \times 10$
1.0	$5.8198 \times 10^{-1}$	$9.2067 \times 10^{-1}$	$9.9615 \times 10^{-1}$	1.00109	1.00014	$9.9998 \times 10^{-1}$
2.0	$1.56578 \times 10^{-1}$	$1.81754 \times 10^{-1}$	$1.18840 \times 10^{-1}$	$6.2936 \times 10^{-1}$	$2.1415 \times 10^{-1}$	$1.56311 \times 10^{-2}$
3.0	$5.2396 \times 10^{-2}$	$5.5141 \times 10^{-2}$	$3.0460 \times 10^{-2}$	$1.11196 \times 10^{-2}$	$4.2179 \times 10^{-2}$	$1.31823 \times 10^{-3}$
5.0	$6.7837 \times 10^{-3}$	$6.8297 \times 10^{-3}$	$3.4612 \times 10^{-3}$	$1.18492 \times 10^{-3}$	$3.1203 \times 10^{-4}$	$6.8894 \times 10^{-5}$

第3.2表(a)  $B_2(At_0)$  の値 (  $At_0$  が実数なる場合 )

次に実際の使用の便を考慮して  $B_l(A\omega)$  に関係する二三の数値例を示す。  
 即ち先づ  $B_l(A\omega)$  の値そのものを種々の  $A\omega$  に対して計算せるものが「表3.2」であつて、(a)は  $A$  が実数の場合に、(b)は複素数なる場合である。又「表3.3」は「表3.2」(a)より求めた  $(A\omega)^l B_l(A\omega)$  の値で、これに依れば、 $l=0\sim 5$  に対する  $(A\omega)^l B_l(A\omega)$  の最大値は、 $A$  が実数にて且つ  $A\omega < 5$  なる時は大凡  $1/A\omega$  にて與へられることが分る。一方高周波回路の周期的包絡インデシヤル量の計算に屢々現れる

$$\overline{B}_\delta(A\omega) = \sum_{l=0}^{\delta} (A\omega)^l B_l(A\omega) \quad (3.12)$$

なる値を表示したものが「表3.4」である。表中の  $\delta$  は  $A\omega$  の虚数部と実数部との比を意味してゐる。

## 参考文献

- (1) Künpfmüller: E.N.T. Bd. 1 S. 141 (1924)
- (2) S. Goldmann: I.R.E. vol. 27 p. 725 (1939)
- (3) H.E. Kallmann & R.E. Spencer: I.R.E. vol. 28 p. 557 (1940)  
C.P. Singer: I.R.E. vol. 28 p. 561 (1940)
- (4) 宮: 電通誌 210号 (昭15-9) 571頁
- (5) A.V. Bedford & G.L. Frendall: I.R.E. vol. 27 p. 277 (1939)
- (6) A.I. Nerken: Trans. of A.I.E.E. vol. 56 p. 768 (1937)
- (7) H.A. Wheeler: I.R.E. vol. 27 p. 359 (1939)
- (8) F. Strecker: E.N.T. Bd. 17 S. 93 (1940)
- (9) F. Strecker: E.N.T. Bd. 17 S. 51 (1940)
- (10) 染谷: 電通誌 227号 (昭17-2) 82頁
- (11) Carslaw: Fourier's Integrals and Series P. 264
- (12) 小泉: 早大電誌 16巻 10頁 (昭10)
- (13) N.W. MacLachlan: Phil. Mag. Vol. 24 p. 1055 (1937)
- (14) L.A. Pipes: Jour. of Franklin Inst. vol. 225 p. 53 (1938)
- (15) 山田: 電学誌 61巻 p. 76 (昭16)
- (16) C.W. Canahon: I.R.E. vol. 23 p. 1393 (1935)
- (17) N. Marchand: I.R.E. vol. 29 p. 330 (1941)
- (18) C.W. Oateley: Wireless Eng. vol. 8 p. 244 & p. 307 (1931)
- (19) H.M. Lane: I.R.E. vol. 20 p. 722 (1932)
- (20) Henney: Radio Engineering Handbook p. 716 (1941)
- (21) N.W. McLachlan: Phil. Mag. vol. 22 p. 481 (1936)
- (22) W. Jackson: Phil. Mag. vol. 13 p. 143 (1932)
- (23) 渡辺, 岡村: 電通誌 昭14年 159頁
- (24) 染谷: 電通誌 昭17, 82頁
- (25) R. Feldkeller: T.F.T. Bd. 29 S. 353 (1940)
- (26) 染谷: 電通誌 昭17 85頁
- (27) 高田, 安藤: 日立評論
- (28) 奥・吉川: 電通誌 昭16 52頁



- (29) J. Gensel: T.F.T. Bd. 29 S. 17 (1940)  
(30) 森 脇: 電通誌 昭/9 177頁  
(31) 森 脇: 未発表  
(32) 染 谷: 紀元2600年記念聯合大会講演会予稿 163頁 (昭15)